

Q 1 On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

Montrer que M est une matrice de rotation si et seulement si (a,b,c) sont les racines d'un polynôme $P(X) = X^3 - X^2 + k$ où $k \in [0, \frac{4}{27}]$. Déterminer alors l'axe de cette rotation.

Q 2 On considère la courbe polaire d'équation

$$\rho = a \operatorname{th}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

- Tracer cette courbe.
- Calculer la longueur d'une portion de courbe pour $\theta \in [0, \alpha]$.

Q 3 On considère la courbe polaire $\rho = a \sin^3 \frac{\theta}{3}$. Trouver le point de cette courbe où le rayon de courbure est maximal. Tracer cette courbe.

Q 4 On considère la courbe paramétrée:

$$\begin{cases} x(t) = a(\cos t + t \sin t) \\ y(t) = a(\sin t - t \cos t) \end{cases}$$

Déterminer les coordonnées du centre de courbure $I(t)$ au point $M(t)$. Reconnaître la développée de cette courbe.

Q 5 Soit

$$f(x,y) = \begin{cases} x^4 & \text{si } y > x^2 \\ y^2 & \text{si } y \leq x^2 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f et l'existence de dérivées partielles.