# 1 Résolution approchée d'un système incompatible par la méthode des moindres carrés.

On considère une matrice $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{R})$ et le système de $n$ équations à $p$ inconnues :

$$AX = B \tag{1}$$

où $B \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$, et $X \in \mathfrak{M}_{p1}(\mathbb{R})$. Soit $u \in L(\mathbb{R}^p,\mathbb{R}^n)$ ayant pour matrice $A$ relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^p$ et $\mathbb{R}^n$, et $b$ le vecteur de $\mathbb{R}^n$ de matrice $B$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
On suppose que le système d'équations (1) est incompatible : $b \notin \operatorname{Im} u$. On se propose de trouver la meilleure solution approchée $x_0$ qui minimise la quantité $\|u(x) - b\|$ (norme euclidienne usuelle de $\mathbb{R}^n$).

$\boxed{Q\ 1}$ Montrer que ce problème de minimisation possède au moins une solution $x_0$ caractérisée par la condition

$$u(x_0) - b \in (\operatorname{Im} u)^{\perp}$$

$\boxed{Q\ 2}$ Montrer que la condition précédente équivaut matriciellement à la condition :

$${}^tA(AX_0 - B) = 0$$

$\boxed{Q\ 3}$ Si on suppose que la matrice carrée ${}^tAA$ est inversible, donner l'expression de $X_0$.

$\boxed{Q\ 4}$ Montrer que la matrice ${}^tAA$ est inversible si et seulement si l'application linéaire $u$ est injective.

$\boxed{Q\ 5}$ Application numérique. Résoudre de façon approchée le système :

$$\begin{cases} x + y &= 1 \\ x - y &= 3 \\ 2x + y &= 2 \end{cases}$$

# 2 Régression linéaire

On dispose d'un nuage de points $\{(x_i,y_i); 1 \leq i \leq n\}$ dans le plan qui ne sont pas sur une même droite verticale et l'on cherche la droite $D$ d'équation $y = ax + b$ qui approxime le mieux ce nuage. On veut rendre minimale la quantité :

$$d(a,b) = \sum_{i=1}^{n} [y_i - (ax_i + b)]^2$$

$\boxed{Q\ 6}$ Mettre ce problème sous forme d'un système incompatible.

$\boxed{Q\ 7}$ Montrer que la matrice ${}^tAA$ est inversible et calculer la matrice $A^{-1}$.

$\boxed{Q\ 8}$ Déterminer les coefficients $a$ et $b$ en fonction des matrices colonnes $X = (x_i) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $Y = (y_i) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

$\boxed{Q\ 9}$ Déterminer la droite des moindres carrés pour les points (0,0), (1,0), (0,1).

# 3 Exercices

$\boxed{Q\ 10}$ Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive :

$$\forall X \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R}), \quad {}^tXAX \geq 0 \text{ et } {}^tXAX = 0 \Rightarrow X = 0$$

Montrer qu'il existe une matrice triangulaire $P$ inversible à éléments diagonaux strictement positifs telle que $A = {}^tPP$.