1 Opérations élémentaires

$\boxed{Q\ 1}$ Calculer les inverses des matrices élémentaires P_{pq}, $D_p(\lambda)$ et $T_{pq}(\lambda)$.

$\boxed{Q\ 2}$ Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose qu'après une suite d'opérations élémentaires sur les colonnes, on transforme A en la matrice I_n. Comment calculer la matrice inverse A^{-1} ?

$\boxed{Q\ 3}$ Déterminer avec cet algorithme, l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{Q\ 4}$ Comment calculer simultanément $\det(A)$?

$\boxed{Q\ 5}$ Dans cet algorithme, peut-on effectuer en alternance des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes ?

$\boxed{Q\ 6}$ Un ordinateur lorsqu'il calcule avec des réels fait toujours des erreurs d'arrondis. Dans cette question, on simulera les calculs en virgule flottante avec deux chiffres significatifs. Par exemple, on arrondira 12345 à $1{,}23 10^4$... Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 10^{-4}x_1 + x_2 & = & 1 \\ \quad x_1 + x_2 & = & 2 \end{cases}$$

en choisissant la première ligne comme pivot, puis en choisissant la deuxième.

En conclusion, si l'on veut programmer la méthode du pivot de Gauss sur un ordinateur, on aura intérêt à choisir la ligne où le coefficient est maximal en valeur absolue comme pivot, pour réduire les erreurs d'arrondis.

2 Déteriminants

$\boxed{Q\ 7}$ Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & & \dots & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & 1 & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ \mathbf{0} & & & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$\boxed{Q\ 8}$ Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & & \mathbf{0} & b & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & a & \mathbf{0} & & b \\ c & & \mathbf{0} & d & & \mathbf{0} \\ & \ddots & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & c & \mathbf{0} & & d \end{vmatrix}$$

Q 9 On considère la matrice $A = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et la matrice $J \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ avec des 1 partout.
a) Vérifier que $P(X) = \det(A + XJ)$ est un polynôme et déterminer son degré.
b) Calculer

$$\begin{vmatrix} a & c & \dots & c \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & c \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}$$

3 Polynômes d'interpolation et matrices de Vandermonde

On considère un polynôme P de degré n et $(n+1)$ points distincts $a_0,\dots,a_n \in \mathbb{R}$. On note $c = (1,X,\dots,X^n)$ la base canonique de l'espace $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ et $l = (L_0,\dots,L_n)$ la base des polynômes de Lagrange aux points $(a_0,\dots,a_n)$. On considère enfin les systèmes de polynômes :

$$f = \Big(P,\, P',\, \frac{P''}{2!},\, \dots,\, \frac{P^{(n)}}{n!}\Big)$$

$$g = \Big(P(X + a_0),\, \dots,\, P(X + a_n)\Big)$$

Q 10 Montrez que le système f est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

Q 11 Ecrivez la matrice de passage P de la base l vers la base canonique c.

Q 12 Ecrivez la matrice $Mat_f(g)$ du système g dans la base f et montrez que le système g est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$.

Q 13 Soit L le polynôme d'interpolation de Lagrange tel que $\forall i \in [0,n]$, $P(a_i) = b_i$. Expliquez comment trouver les coefficients de P par le calcul matriciel.

Q 14 Montrez, en écrivant une formule de Taylor que la matrice

$$M = \begin{pmatrix} P(a_0) & \dots & P(a_n) \\ P'(a_0) & \dots & P'(a_n) \\ \vdots & & \vdots \\ P^{(n)}(a_0) & \dots & P^{(n)}(a_n) \end{pmatrix}$$

est inversible.