1 Puissances de matrices 2×2.

On note E le $\mathbb{C}$-e.v. $\mathbb{C}^2$ et $e=(e_1,e_2)$ la base canonique de $\mathbb{C}^2$. Pour une matrice $A=\begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix}$, on définit les deux scalaires : $\mathrm{Tr}(A)=a+d$ (trace) et $\det(A)=ad-bc$ (déterminant). On note u l'unique endomorphisme de E tel que $Mat_e(u)=A$.

$\boxed{Q\ 1}$ Montrer que

$$A^2-\mathrm{Tr}(A)A+\det(A)I=0 \tag{1}$$

$\boxed{Q\ 2}$ Montrer que $(A\in GL_2(\mathbb{C}))\iff(\det(A)\neq 0)$. Lorsque $\det(A)\neq 0$, montrer que

$$A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\begin{pmatrix} d & -c\\ -b & a\end{pmatrix}$$

$\boxed{Q\ 3}$ Lorsque $\det(A)=0$, montrer que u est nilpotent ou que u est la composée d'un projecteur et d'une homothétie.

On considère le *polynôme caractéristique* de la matrice A :

$$P_A(X)=X^2-\mathrm{Tr}(A)X+\det(A)$$

C'est un trinôme à coefficients complexes.
On suppose dans un premier temps que $P_A(X)$ possède deux racines distinctes α et $\beta\in\mathbb{C}$.

$\boxed{Q\ 4}$ Montrer que $E=\mathrm{Ker}(u-\alpha\,\mathrm{id})\oplus\mathrm{Ker}(u-\beta\,\mathrm{id})$.

$\boxed{Q\ 5}$ Montrer qu'il existe deux vecteurs de E tels que $vect(f_1)=\mathrm{Ker}(u-\alpha\,\mathrm{id})$ et $vect(f_2)=\mathrm{Ker}(u-\beta\,\mathrm{id})$. Montrer ensuite que le système $f=(f_1,f_2)$ est une base de E.

$\boxed{Q\ 6}$ Ecrire la matrice de l'endomorphisme u dans la base f : $D=Mat_f(u)$.

$\boxed{Q\ 7}$ Calculer pour un entier $n\in\mathbb{N}$, la matrice D^n.

On note $P=P_{e\to f}$ la matrice de passage de la base e vers la base f.

$\boxed{Q\ 8}$ Montrer que $A^n=PD^nP^{-1}$.

$\boxed{Q\ 9}$ Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$. Calculer par la méthode précédente la matrice de passage P, la matrice D et déterminer la matrice A^n.

On suppose maintenant que le trinôme $P_A(X)$ possède une racine double α. On note $d=u-\alpha\,\mathrm{id}$.

$\boxed{Q\ 10}$ Si A n'est pas une matrice scalaire, montrer que d est un endomorphisme nilpotent d'ordre 2 exactement.

$\boxed{Q\ 11}$ Montrer qu'il existe une base de E de la forme $g=\big(x,d(x)\big)$ avec $x\in E$.

$\boxed{Q\ 12}$ Déterminer $L=Mat_g(u)$.

$\boxed{Q\ 13}$ Montrer qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $A = PLP^{-1}$.

$\boxed{Q\ 14}$ Calculer L^n.

$\boxed{Q\ 15}$ En déduire que $A^n = PL^nP^{-1}$.

$\boxed{Q\ 16}$ Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Calculer par la méthode précédente, la matrice A^n.

2 Résolution matricielle de suites récurrentes linéaires

On considère la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1,\, u_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\, u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n \end{cases}$$

On note pour $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$

$\boxed{Q\ 17}$ Trouver une matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n$$

et vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0$$

$\boxed{Q\ 18}$ Calculer la matrice A^n, et en déduire l'expression de u_n en fonction de n.