

1 Intégrales de Wallis.

Pour un entier $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n t \, dt$$

Q 1 Calculer les intégrales I_0 et I_1 .

Q 2 Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

Q 3 Montrer que pour un entier $n \geq 2$,

$$nI_n = (n-1)I_{n-2}$$

Q 4 Montrer que $\frac{I_{n+1}}{I_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

Q 5 Soit un entier $p \in \mathbb{N}$. Calculer les intégrales I_{2p} et I_{2p+1} . (On fera apparaître dans le résultat final, le coefficient binomial $\binom{2p}{p}$).

Q 6 Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la suite de terme général $(n+1)I_n I_{n+1}$ est constante.

Q 7 Montrer que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Q 8 En déduire un équivalent de la suite de terme général $\binom{2p}{p}$.

Q 9 On peut montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$n! \sim C e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}$$

Trouver, en utilisant les intégrales de Wallis, la valeur de C . On obtient alors la *formule de Stirling* qui donne un équivalent de $n!$:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Q 10 Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n t \, dt = \int_0^1 (1-x^2)^{\frac{(n-1)}{2}} dx$$

2 Algorithme du rang

Soit E un K-e.v. de dimension finie. On considère un système de vecteurs de E :

$$S = (x_1, \dots, x_k)$$

Q 11 Montrer que l'entier $rg(S)$ est le plus grand des cardinaux des systèmes libres extraits de S .

Q 12 Soit le système $S' = (x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_k)$ où l'on a remplacé le i^e vecteur x_i par une combinaison linéaire de la forme

$$y = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_i x_i + \dots + \lambda_k x_k$$

avec $\lambda_i \neq 0$. Montrer que $\text{Vect}(S') = \text{Vect}(S)$ et que $rg(S') = rg(S)$.

Q 13 Montrer que l'on peut supprimer les vecteurs nuls dans la recherche du rang :

$$rg(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) = rg(x_1, \dots, x_k)$$

On considère maintenant une base de E , $e = (e_1, \dots, e_n)$ et on décompose chacun des vecteurs x_i sur cette base :

$$\forall i \in [1, k], \quad x_i = x_{1i}e_1 + x_{2i}e_2 + \dots + x_{ni}e_n$$

On écrit les composantes des vecteurs $(x_1, \dots, x_k)$ sous forme de tableau :

	x_1	x_2	$\dots$	$\dots$	x_k
e_1	x_{11}	x_{12}	$\dots$	$\dots$	x_{1k}
e_2	x_{21}	x_{22}	$\dots$	$\dots$	x_{2k}
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\vdots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
e_n	x_{n1}	x_{n2}	$\dots$	$\dots$	x_{nk}

Q 14 Quel est le rang dans $\mathbb{R}^5$ du système $(x_1, \dots, x_6)$ où

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
?	?	?	1	0	0
?	?	2	0	0	0
?	?	0	0	0	0
?	3	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0

Q 15 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère le système $S = ((1,1,1,1), (5,2,3,1), (8,3,3,1), (3,0,1,-1))$. Trouver son rang.

Q 16 Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère le sev $F = \text{Vect}((1,1,1,1), (4,4,3,2), (2,5,2,1), (5,8,4,0), (1,4,1,-2))$. Trouver la dimension de F et une base de F .

Q 17 Soit

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \end{cases} \longrightarrow \mathbb{R}^4 \quad \mapsto \quad (x - y, x + y + z, z - y, 2x - y - 2z)$$

Déterminer $rg(u)$.

Q 18 Soit l'application

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow \\ (x, y, z, t) & \longmapsto \end{cases} \quad \mathbb{R}^3 \quad (2x + y - z, t - x, x + y + z + t)$$

Trouver une base de $\text{Ker } u$, et déterminer sa dimension.

Q 19 Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_3[X]$. On considère les formes linéaires définies par :

$$f_1(P) = P(2) + P(1) - P(0) + P(3), \quad f_2(P) = 3P(2) - P(0)$$

$$f_3(P) = -P(3) + P(0) - P(2), \quad f_4(P) = 3P(0) + 2P(2) - P(1)$$

Trouver le rang du système $(f_1, \dots, f_4)$ dans E^* .

Q 20 Montrer qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X], \quad \int_0^1 f(t) dt = aP(-1) + bP(0) + cP(1)$$

Q 21 Soit le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini par $E = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$ où

$$e_1 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto e^x \end{cases}, \quad e_2 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto e^x \sin x \end{cases}, \quad e_3 : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto e^x \cos x \end{cases}$$

On définit

$$F = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \text{ tq } \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = (a - b)e^x \cos x + (b - c)e^x \sin x + ae^x\}$$

a) Montrer que E est un espace vectoriel de dimension finie, et préciser sa dimension.

b) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E dont on précisera la dimension.

b) Soit D l'application telle que $\forall f \in E, D(f) = f'$. Vérifier que $D \in L(E)$, puis montrer que D est inversible.

Q 22 Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$, on définit pour un réel $\alpha \in \mathbb{R}, \forall (i, j) \in [1, n]^2, a_{ij} = 1 + (\alpha - 1)\delta_{ij}$ où δ_{ij} est le symbole de Kronecker :

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Pour $j \in [1, n]$, on note $x_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}e_i$ où $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E . Trouver le rang du système $(x_1, \dots, x_n)$.