Soit $(a_0,\dots,a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ $n+1$ réels tous distincts et $(b_0,\dots,b_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ $(n+1)$ réels.

$\boxed{Q\ 1}$ Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant :

1. $L_i(a_i) = 1$;
2. $\forall j \neq i$, $L_i(a_j) = 0$.

$\boxed{Q\ 2}$ Montrer que $\mathcal{L} = (L_0,\dots,L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

$\boxed{Q\ 3}$ Montrer qu'il existe un unique polynôme $L \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad L(a_i) = b_i$$

C'est le *polynôme d'interpolation de Lagrange* aux points (a_i,b_i).

$\boxed{Q\ 4}$ Trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(-1) = 2$, $P(2) = 1$ et $P(3) = 0$.

Dans la suite, I désigne l'intervalle $[-1,1]$. On considère une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$, et n réels $(x_1,\dots,x_n)$ de I tous distincts. On se propose de majorer l'erreur commise en approximant f par son polynôme d'interpolation de Lagrange aux points $(x_i,f(x_i))$.

$\boxed{Q\ 5}$ Soit $x \in I$ distinct des points (x_i). On note g_x la fonction définie sur I par

$$g_x(t) = f(t) - L(t) - \big(f(x) - L(x)\big) \prod_{1 \le i \le n} \frac{t - x_i}{x - x_i}$$

a) Montrer que g_x possède au moins $(n+1)$ zéros dans I.
b) En déduire que $g_x^{(n)}$ s'annule sur I.
c) Si $M_n = \sup_{x \in I} \left|f^{(n)}(x)\right|$, montrer que $\forall x \in I$,

$$|f(x) - L(x)| \le \frac{M_n}{n!} \prod_{1 \le i \le n} |x - x_i|$$

On cherche maintenant à déterminer les points (x_i) qui rendent minimale la quantité $\sup_{x \in I} \prod_{1 \le i \le n} |x - x_i|$.

$\boxed{Q\ 6}$ Montrer qu'il existe un polynôme unitaire T_n de degré n tel que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(cos\theta) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n\theta)$$

C'est le nième *polynôme de Tchebychev*.

$\boxed{Q\ 7}$ Montrer que T_n possède n racines distinctes appartenant à I.

$\boxed{Q\ 8}$ En déduire des valeurs des (x_i) pour lesquelles

$$\prod_{1 \le i \le n} |x - x_i| \le \frac{1}{2^{n-1}}$$

et écrire la majoration de l'erreur obtenue en choisissant ces points. (On peut montrer que le choix de ces points est optimal).