$\boxed{Q\ 1}$ Dans $\mathbb{R}^4$, montrer que les vecteurs $(1,0,0,1)$ et $(2,1,-1,0)$ engendrent le même sev que les vecteurs $(3,1,-1,1)$ et $(5,2,-2,1)$.

$\boxed{Q\ 2}$ Dans $E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on considère les ensembles

$$F=\{f\in E \mid f(1)=0\} \text{ et } G=\{f\in E \mid \exists a\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=ax\}$$

Montrer que F et G sont deux sev supplémentaires.

$\boxed{Q\ 3}$ Soit un K-ev E et trois sev A,B,C de l'espace E vérifiant :

$$E=A\oplus B \text{ et } A\subset C$$

Montrer que $C=A\oplus(B\cap C)$.

$\boxed{Q\ 4}$ Dans l'espace vectoriel $E=\mathbb{R}^4$, on considère l'ensemble

$$F=\{(x,y,z,t)\in E \mid x=y \text{ et } x-y+t=0\}$$

a. Montrer que F est un sev de E, et déterminer une base de F ;
b. Déterminer un supplémentaire de F dans E ;
c. Le supplémentaire trouvé est-il unique?

$\boxed{Q\ 5}$ Montrer que dans l'espace $E=\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, les systèmes définis par :

$$S=\big(e^t,e^{2t},\dots,e^{nt}\big)$$
$$S'=\big(|x-1|,|x-2|,\dots,|x-n|\big)$$

sont libres.

$\boxed{Q\ 6}$ On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-ev. Soit l'application $f:\mathbb{C}\mapsto\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall z\in\mathbb{C},\quad f(z)=(1+i)z+(1-i)\overline{z}$$

a. Montrer que f est linéaire ;
b. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

$\boxed{Q\ 7}$ Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire suivante :

$$u:\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^4 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3\\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x-y+t,2x+y-z,y+z)\end{array}\right.$$

$\boxed{Q\ 8}$ Trouver une application linéaire $u:\mathbb{R}^2\mapsto\mathbb{R}^2$ telle que $\operatorname{Im} u=\operatorname{Ker} u=\operatorname{Vect}\big((1,1)\big)$.

$\boxed{Q\ 9}$ On considère $E=\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$-ev. On définit l'application

$$u:\left\{\begin{array}{ccc}E & \longrightarrow & E\\ z & \mapsto & iz-i\overline{z}\end{array}\right.$$

a. Montrer que $u\in L(E)$;
b. Déterminer $\operatorname{Ker} u$;
c. Déterminer $\operatorname{Im} u$;
d. Calculer u^2 ;
e. En déduire que l'endormorphisme $(\mathrm{id}+2u)$ est inversible et déterminer son inverse $(\mathrm{id}+2u)^{-1}$.