Q 1 En développant $(1+x)^n(1+x)^n$ de deux façons différentes, et en cherchant le coefficient de x^n, calculer la somme

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Retrouver ce résultat en considérant un ensemble E de cardinal $2n$ et une partition de E en deux ensembles A et B de cardinaux n.

Q 2 Soit un ensemble fini E de cardinal n. Déterminez le nombre de :
a) Relations binaires sur E ;
b) Relations réflexives sur E ;
c) Relations symétriques sur E ;
d) Relations réflexives et symétriques sur E ;
e) Relations réflexives et antisymétriques sur E.

1 Deux méthodes de calcul des sommes de puissances d'entiers

1.1 Une méthode élémentaire

Pour $n \geq 1$ et $p \geq 1$, on note

$$S_p = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$$

Q 3 Soit un entier $j \in \mathbb{N}$. Développer avec la formule du binôme $(j+1)^2$ et additionner ces résultats pour $1 \leq j \leq n$. En déduire la valeur de S_1.

Q 4 Développer $(j+1)^3$ et en déduire S_2.

1.2 Une autre méthode

L'idée est qu'il est plus facile de calculer des sommes de coefficients binômiaux grâce à la propriété d'additivité.

Q 5 Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{k+j}{j} = \binom{n+k+1}{n}$$

Q 6 Montrez que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq k$,

$$T_k(n) = \sum_{p=k}^{n} \binom{p}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

Q 7 Déduire de la question précédente la valeur de la somme S_1.

Q 8 Montrer qu'il existe $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall j \geq 2, \quad j^2 = \alpha\binom{j}{2} + \beta\binom{j}{1}$.

Q 9 En déduire le calcul de la somme S_2.

Q 10 Calculer S_3 et généraliser.

2 Table de loi d'un groupe fini

Soit $(G,.)$ un groupe et un élément $a \in G$. On définit les translations à droite et à gauche :

$$\tau_a : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x.a \end{array} \right. \qquad \gamma_a : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & a.x \end{array} \right.$$

$\boxed{Q\ 11}$ Montrer que les applications τ_a et γ_a sont des bijections.

$\boxed{Q\ 12}$ Soit l'application $\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} (G,.) & \longrightarrow & (\mathcal{B}(G),\circ) \\ a & \longmapsto & \gamma_a \end{array} \right.$. Montrer que ϕ est un morphisme injectif de groupes.

$\boxed{Q\ 13}$ Soit un groupe $(G,.)$ de cardinal fini n. Montrer que dans sa table de loi, chaque ligne et chaque colonne contient une et seule fois tous les éléments de G.

$\boxed{Q\ 14}$ Déterminer en examinant les tables de lois, tous les groupes de cardinal 2.

$\boxed{Q\ 15}$ Déterminer de même la table d'un groupe de cardinal 3.

$\boxed{Q\ 16}$ Trouver les tables de loi possibles d'un groupe de cardinal 4.

$\boxed{Q\ 17}$ En déduire qu'un groupe de cardinal 4 est toujours commutatif.

$\boxed{Q\ 18}$ Soit G un ensemble <u>fini</u> et $\star$ une lci sur G associative et commutative telle que

$$\forall (a,x,y) \in G^3, \quad a \star x = a \star y \Rightarrow x = y$$

Montrer que $(G,\star)$ est un groupe.