$\boxed{Q\ 1}$ Pour un entier $n \geq 4$, déterminer la dérivée nième de la fonction

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \sin x \end{cases}$$

$\boxed{Q\ 2}$ Soient deux réels a et $x_0 > 0$. On définit la fonction

$$f : \begin{cases}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} a\sqrt{x} & \text{si } x < x_0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x \geq x_0 \end{cases} \end{cases}$$

Trouvez les valeurs des réels a et x_0 pour lesquelles la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$\boxed{Q\ 3}$ **Formule de Taylor-Lagrange**

Soit une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ n fois dérivable sur le segment $[a,b]$. Montrez qu'il existe un réel $c \in [a,b]$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(c)$$

$\boxed{Q\ 4}$ Soit une fonction $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = f'(0) = f(1) = 0$. Montrer qu'il existe un réel $c \in\ ]0,1[$ tel que la tangente à la courbe de f au point $\big(c, f(c)\big)$ passe par l'origine.

$\boxed{Q\ 5}$ **Théorème des accroissements finis généralisés**

Soient deux fonctions continues $f,g : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ sur le segment $[a,b]$ et dérivables sur l'intervalle ouvert $]a,b[$. Montrer qu'il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que

$$\big[f(b) - f(a)\big] g'(c) = \big[g(b) - g(a)\big] f'(c)$$

$\boxed{Q\ 6}$ Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

a. On considère $x_0 \in \mathbb{R}$ et $h > 0$. Montrer qu'il existe $\theta \in\ ]-1,1[$ tel que :

$$f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h) = h^2 f''(x_0 + \theta h)$$

b. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \xrightarrow[h \to 0]{} f''(x)$$

c. Si on suppose que f est uniquement deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, montrer que le résultat de a. est encore vrai.

$\boxed{Q\ 7}$ Soit $(a,\lambda) \in \mathbb{R}^2$ et

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^{ax} & \text{si } x \leq 0 \\ \operatorname{th}(\lambda x) + \operatorname{ch} x & \text{si } x > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Trouver une CNS sur λ et a pour que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

$\boxed{Q\ 8}$ On considère la suite (a_n) définie pour $n \geq 2$ par :

$$a_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \ln k} - \ln(\ln n)$$

a) Montrer que $\forall n \geq 2$, $\exists c_n \in]n,n+1[$ tel que

$$\ln(\ln(n+1)) - \ln(\ln n) = \frac{1}{c_n \ln c_n}$$

b) En déduire que (a_n) est monotone.
c) Montrer que (a_n) est convergente. (On pourra écrire

$$a_n = \sum_{k=2}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) + a_2$$