On demande de trouver un équivalent simple, et la limite éventuelle des suites suivantes :

Q 1

$$u_n = 2n^4\big(1-\cos(1/n)\big)\ln(1+1/n)\tan\left(\frac{1}{n+e^{-n}}\right)$$

Q 2

$$u_n = \frac{e^{1/n!}-2^n}{1-\cos(1/n!)}\sin^2(1/\sqrt{n})$$

Q 3

$$u_n = \frac{e^{2^{-n}}+\sqrt{1+1/2^n}-2}{2^{-n}+\sin\left(\dfrac{2}{n+\ln n}\right)}$$

Q 4

$$u_n = \frac{\ln(n+1)-\ln n}{\sqrt{1+\tan(1/2^n)}-\cos(1/2^n)}$$

Q 5

$$u_n = \cos\Big(\frac{\pi}{2}\frac{n^2+1}{n^2+n+2}\Big)$$

Q 6

$$u_n = \frac{\ln\left(n^2+e^n\right)}{\tan(1/\sqrt{n})-\sin(1/n)}$$

Q 7

$$u_n = \frac{\ln\big(n\ln n+\sqrt{n}(\ln n)^2\big)}{\ln\big(\cos(1/n)\big)+\sin(1/n^2)}$$

Q 8

$$u_n = \frac{e^{2n}+n^2+1/n}{e^n\tan(1/n)}\Big(\sqrt{1+\ln(1+1/n)}-1\Big)$$

Q 9

$$u_n = \big(e^{n+\ln n-\cos(2/n)+1/\ln n}\big)\big(\cos(1/n)e^{1/n}-1\big)$$

Q 10

$$u_n = \left(\frac{\ln(1+n)}{\ln n}\right)^{n\ln n}$$

$\boxed{Q\ 11}$

$$u_n = \ln\left[e^{\cos\frac{1}{n}} + \frac{1}{\operatorname{sh} n}\right] - \cos(1/n)$$

1 Équivalents de suites définies implicitement.

Pour $n \geq 2$, on définit la fonction

$$\phi_n : \begin{cases}]0, +\infty[\mapsto & \mathbb{R} \\ x \mapsto & x - ln(x) - n \end{cases}$$

$\boxed{Q\ 12}$ Montrer que $\forall n \geq 2$, la fonction ϕ_n s'annule exactement deux fois en deux valeurs $x_n \in]0,1[$ et $y_n \in]1,+\infty[$

$\boxed{Q\ 13}$ Calculer $\phi_{n+1}(x_n)$ et en déduire que la suite (x_n) est décroissante. Montrer qu'elle converge vers $l \in \mathbb{R}$.

$\boxed{Q\ 14}$ Montrer que $l = 0$.

$\boxed{Q\ 15}$ Montrer que $x_n \sim e^{-n}$.

$\boxed{Q\ 16}$ Trouver un équivalent de la suite $(x_n - e^{-n})$.

$\boxed{Q\ 17}$ Montrer que la suite (y_n) est croissante.

$\boxed{Q\ 18}$ Montrer que la suite (y_n) diverge vers $+\infty$.

$\boxed{Q\ 19}$ Montrer que $y_n \sim n$.

$\boxed{Q\ 20}$ Montrer que $\ln y_n \sim \ln n$ puis en déduire un équivalent simple de la suite $(y_n - n)$.