1 Convergence en moyenne: théorème de Césaro.

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite. On lui associe la suite de ses moyennes définie par :

$$\forall n \geq 1,\ S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$$

On dit que la suite (u_n) converge *en moyenne* si la suite (S_n) converge.

$\boxed{Q\ 1}$ On suppose que la suite (u_n) converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$. Montrez que la suite (S_n) converge vers la même limite l. C'est le théorème de *Césaro*.

$\boxed{Q\ 2}$ Si la suite (u_n) diverge vers $+\infty$, montrez que la suite (S_n) diverge également vers $+\infty$.

$\boxed{Q\ 3}$ Trouvez un exemple de suite divergente qui converge en moyenne.

2 Exercices

$\boxed{Q\ 4}$ Étudiez les suites de terme général

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{kk!}$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n^2 n!}$$

Montrez que leur limite commune est irrationnelle.

$\boxed{Q\ 5}$ Étudier la suite de terme général

$$u_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \cdots + \sqrt{n}}}}$$

(On pourra majorer $u_{n+1} - u_n$).