

1 Notations des sommes

Soit I un ensemble fini, par exemple $I = \{1, 2, \dots, n\}$ et $(a_i)_{i \in I}$ une famille de réels. On définit la *somme* de cette famille notée

$$\sum_{i \in I} a_i$$

Sur l'exemple,

$$\sum_{i \in I} a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

Et on définit de même le *produit* de cette famille. Sur l'exemple,

$$\prod_{i \in I} a_i = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$$

Exemple : Soit $I = \{1, 2, \dots, n\}$. $\forall i \in I, a_i = i^2$.

$$\sum_{i \in I} a_i = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$$

Si $I = \{n, n+1, n+2, \dots, p\}$, on note $\sum_{i=n}^p a_i = \sum_{k=n}^p a_k = \sum_{i \in I} a_i$.

(k, i s'appelle un indice de sommation, c'est une lettre *muette*).

Q 1 Ecrire la formule du binôme de Newton en utilisant ces notations.

Q 2 Que vaut la somme $\sum_{i=0}^n k^i$ si $k \in \mathbb{R}$?

Q 3 Que vaut la somme $\sum_{i=1}^n i$?

Quelques sommes classiques à connaître :

$$\sum_{i=1}^n i = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{i=1}^n i^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

Sommes doubles. On peut considérer des ensembles d'indices plus compliqués, par exemple $I = \{(1,2), (1,3), (2,2), (3,2)\}$. Soit $a_{ij} = i + j$.

$$\sum_{(i,j) \in I} a_{ij} = (1+2) + (1+3) + (2+2) + (3+2) = 16$$

Un cas courant est $I = \{1, 2, \dots, n\}$ et $J = \{1, 2, \dots, p\}$. L'ensemble d'indices considéré est le produit cartésien $I \times J$. Si $(a_{ij})_{i \in I \times J}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{R}$, on note :

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^p a_{ij} \right) = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^n a_{ij} \right) = \sum_{(i,j) \in I \times J} a_{ij}$$

Pour comprendre ce que signifient ces deux sommes, considérer l'exemple suivant : $I = \{1,2\}$, $J = \{1,2,3\}$. Alors :

$$\sum_{i=1}^2 \left(\sum_{j=1}^3 a_{ij} \right) = \underbrace{(a_{11} + a_{12} + a_{13})}_{i=1} + \underbrace{(a_{21} + a_{22} + a_{23})}_{i=2}$$

$$\sum_{j=1}^3 \left(\sum_{i=1}^2 a_{ij} \right) = \underbrace{(a_{11} + a_{21})}_{j=1} + \underbrace{(a_{12} + a_{22})}_{j=2} + \underbrace{(a_{13} + a_{23})}_{j=3}$$

L'ordre des signes sommes correspond à l'ordre qu'on choisit pour sommer les éléments.

Factorisation de termes : si l'on peut mettre un terme en facteur dans une somme, on le sort du signe $\sum$.

Exemple : $\sum_{k=1}^n 2k = 2 \sum_{k=1}^n k = n(n+1)$.

$$\boxed{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p a_i b_j = \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{j=1}^p b_j \right)}$$

Q 4 Calculer la somme

$$S = \sum_{k=0}^n \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \binom{n}{k}$$

Q 5 Calculer la somme

$$\sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^p i \binom{n}{j} (\sqrt{2})^j$$

Voyons un exemple un peu plus compliqué :

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^i a_{ij} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=j}^n a_{ij}$$

Q 6 On considère la somme

$$S = \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n \binom{n}{j} \binom{j}{i}$$

a) Intervertir les signes sommes

b) Calculer S .

Changement d'indices On peut changer les bornes de l'intervalle de sommation en posant par exemple $i = k - n$, alors lorsque $k = n$, $i = 0$ et lorsque $k = p$, $i = p - n$. On remplace ensuite à l'intérieur de la somme, tous les k par $i + n$:

$$S = \sum_{k=n}^p a_k = \sum_{i=0}^{p-n} a_{i+n}$$

Un exemple élémentaire :

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right) \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \\
&= \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad (i = k+1) \\
&= \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} - \left(\sum_{k=2}^n \frac{1}{k} + \frac{1}{1} \right) \quad \text{les indices sont muets} \\
&= \frac{1}{n+1} - 1
\end{aligned}$$

Q 7

a) Trouver trois réels a, b, c tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 1 \quad \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$$

b) En déduire la valeur de la somme

$$S = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

Q 8 Calculer la somme

$$S = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j)^2$$