# 1 Géométrie

**Ex 1** `Cours`

Déterminer les applications affines $f : E \mapsto E$ telles que pour toute translation $t$,

$$t \circ f = f \circ t$$

**Ex 2** `Facile`

Soit dans l'espace les points $A = (1,2,1)$ et $B = (0, -1,1)$. Déterminer les homothéties $h$ telles que $h(A) = B$ et telles que $h(B)$ soit dans le plan

$$\mathcal{P} : x + y + z - 1 = 0$$

**Ex 3** `Cours`

Il s'agit de reconnaître l'application suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{E}_3 & \longrightarrow & \mathcal{E}_\ni \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 3x + 4y + 2z - 4 \\ -2x - 3y - 2z + 4 \\ 4x + 8y + 5z - 8 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

a) Chercher les points invariants par $f$.
b) Montrer que $\forall M \in \mathcal{E}_3$, $\overrightarrow{Mf(M)}$ est toujours parallèle à un vecteur fixe $\overrightarrow{u}$.
c) Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall M \in \mathcal{E}_3$:

$$f(M) = p(M) + \alpha \overrightarrow{p(M)M}$$

Reconnaître l'application $f$.

**Ex 4** `Cours`

Trouver l'expression analytique de la symétrie affine par rapport au plan $\mathcal{P}$ passant par les points $A\left|\begin{matrix}1\\2\\-1\end{matrix}\right.$, $B\left|\begin{matrix}0\\-1\\1\end{matrix}\right.$ et $C\left|\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\right.$, de direction la droite vectorielle d'équation :

$$D : \left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{array} \right.$$

**Ex 5** `Moyen`

Dans le plan, on considère trois points $(A,B,C)$ non-alignés, et trois réels $\alpha,\beta,\gamma$ tels que les barycentres $G = \text{Bar}\begin{pmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$, $G_1 = \text{Bar}\begin{pmatrix} A & B & C \\ -\alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$, $G_2 = \text{Bar}\begin{pmatrix} A & B & C \\ \alpha & -\beta & \gamma \end{pmatrix}$, $G_3 = \text{Bar}\begin{pmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & -\gamma \end{pmatrix}$ existent.

a. Montrer que les droites $(AG_1)$, $(BG_2)$ et $(CG_3)$ sont concourantes au point $G$.
b. Montrer que les droites $(G_2G_3)$, $(G_1G_3)$ et $(G_1G_2)$ passent respectivement par les points $A$, $B$ et $C$.

**Ex 6** `Facile`

Soit dans l'espace les points $A = (1,2,1)$ et $B = (0, -1,1)$. Déterminer les homothéties $h$ telles que $h(A) = B$ et telles que $h(B)$ soit dans le plan

$$\mathcal{P} : x + y + z - 1 = 0$$

**Ex 7** `Moyen, intéressant`

On considère une application affine $f$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ vérifiant $f^n$ est une application constante. Montrer que $f$ admet un unique point fixe.

**Ex 8** `Moyen, intéressant`

Soit un sous-groupe $G$ fini du sous-groupe affine d'un espace $E$.

a. Montrer qu'il existe un point $A \in E$ tel que $\forall f \in G$, $f(A) = A$.
b. Soit une application affine $f : E \mapsto E$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ avec $f^n = \text{id}_E$. Montrer que $f$ possède un point fixe.

**Corrigé des exercices**

$\boxed{Q\ 1}$ Soit $M \in E$. On a $\forall \overrightarrow{u} \in E$:

$$f(M) + \overrightarrow{u} = f(M + \overrightarrow{u}) = f(M) + L_f(\overrightarrow{u}) \Rightarrow L_f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$$

et donc $L_f = \mathrm{id}_E$ et par conséquent, $f$ est une translation.

$\boxed{Q\ 2}$ Comme la partie linéaire de $h$ est $\alpha\,\mathrm{id}$, son expression analytique est de la forme :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \alpha x \\ b + \alpha y \\ c + \alpha z \end{pmatrix}$$

(le triplet $(a,b,c)$ ne correspond pas ici aux coordonnées du centre de l'homothétie). Comme $h(A) = B$ et $h(B) \in \mathcal{P}$, on trouve les conditions :

$$a = -\alpha, b = -2\alpha - 1, c = 1 - \alpha \text{ et } a + b + c - 1 = 0$$

d'où $\alpha = -\dfrac{1}{4}$ et $a = \dfrac{1}{4}$, $b = -\dfrac{1}{2}$, $c = \dfrac{5}{4}$.

$\boxed{Q\ 3}$

- Plan invariant :

$$P : x + 2y + z - 2 = 0$$

- Direction : $\overrightarrow{u} = (1, -1, 2)$
- Rapport : 3.

$\boxed{Q\ 4}$ Le vecteur $\overrightarrow{d} = (-1,3,2)$ dirige $\mathcal{D}$. On a alors $s(M) = M + \lambda \overrightarrow{d}$. On trouve $\lambda$ en disant que le milieu du segment $[M, s(M)]$ est dans le plan $\mathcal{P}$. Une équation cartésienne de $\mathcal{P}$ est :

$$-4x + 2y + z + 1 = 0$$

d'où $\lambda = \dfrac{4x - 2y - z - 1}{6}$ et l'expression analytique :

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ -1/2 \\ -1/3 \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 12 & 0 & -3 \\ 8 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$\boxed{Q\ 5}$

a. On montre que $\overrightarrow{G_1G} = \dfrac{2\alpha}{-\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{GA}$.

b. Montrer que $\overrightarrow{G_2G_3} = -\dfrac{2\alpha}{\alpha - \beta + \gamma} \overrightarrow{G_3A}$ et donc $A \in (G_2G_3)$.

$\boxed{Q\ 6}$ Comme la partie linéaire de $h$ est $\alpha\,\mathrm{id}$, son expression analytique est:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \alpha x \\ b + \alpha y \\ c + \alpha z \end{pmatrix}$$

Comme $h(A) = B$ et $h(B) \in \mathcal{P}$, on trouve les conditions

$$a = \alpha, b = -2\alpha - 1, c = 1 - \alpha \text{ et } a + b + c - 1 = 0$$

d'où $\alpha = -\dfrac{1}{2}$ et $a = -\dfrac{1}{2}$, $b = 0$, $c = \dfrac{3}{2}$.

$\boxed{Q\ 7}$

1. **Unicité :** Supposons que $f(A) = A$ et $f(B) = B$. Alors $f^n(A) = A$ et $f^n(B) = B$, mais comme $f^n$ est constante, $A = B$.
2. **Existence :** Soit un point $A \in E$. Notons $G = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} A & f(A) & \dots & f^{n-1}(A) \\ 1/n & 1/n & \dots & 1/n \end{pmatrix}$ On vérifie que $f(G) = G$.

$\boxed{Q\ 8}$

a. Notons $G = \{f_1, \dots, f_n\}$ et $O \in E$ un point. Considérons l'isobarycentre des points $f_1(O), \dots, f_n(0)$. Alors pour $i \in [\![1,n]\!]$, $f_i(O)$ est l'isobarycentre du système $\big(f_i(f_1(O)), \dots f_i(f_n(O))\big)$. Mais comme $G$ est un groupe, $f_i \circ f_k = f_l \in G$. On retrouve tous les éléments du groupe et donc $f_i(O) = O$.

b. Il suffit d'appliquer a. au sous-groupe fini $G = \{\mathrm{id}, f, \dots f^{n-1}\}$.