Ex 1 `Facile, Cours`

Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, on considère le sous-espace F défini par les équations : $\begin{cases} x - y + z &= 0 \\ x + y + 2z &= 0 \end{cases}$

a. Déterminer $F^\perp$.

b. On note s la symétrie orthogonale par rapport à F. Calculer sa matrice $S = \mathrm{Mat}_e(s)$ dans la base canonique.

Ex 2 `Facile`

On considère un espace euclidien E muni d'une base $e = (e_1, \dots, e_n)$. Montrer que $\forall (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique vecteur $x \in E$ vérifiant $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $(x \mid e_i) = a_i$.

Ex 3 `Classique`

Soit la fonction de deux variables $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{x \sin y - y \sin x}{x^2 + y^2}$ lorsque $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$. Etudier la continuité et l'existence des dérivéees partielles de f en tout point. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Ex 4 `facile`

Soit une fonction d'une variable $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$. On définit la fonction de deux variables $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ en posant $f(x,y) = \int_0^y (x - t)\phi(t)dt$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer les dérivées partielles de f.

Ex 5 `Moyen`

Soit la fonction de deux variables définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^4 & \text{si } y > x^2 \\ y^2 & \text{si } y \leq x^2 \end{cases}$$

Étudier la continuité de f et l'existence de dérivées partielles.

Ex 6 `facile`

On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \|(x,y)\|$ (norme euclidienne). Etudier la continuité de f et étudier les dérivées partielles de f.

Ex 7 `Facile, cours`

Déterminer les extremas locaux de la fonction $f(x,y) = x^3 + x^2 + y^2$.

Indication : Montrer que le second extrémum n'est ni un minimum ni un maximum local. Pour cela, faire un changement de variables $\widetilde{f}(u,v)$ pour se ramener en $(0,0)$ et étudier les fonctions $\widetilde{f}(t,0)$ et $\widetilde{f}(0,t)$ pour montrer que $\widetilde{f}(u,v) - \widetilde{f}(0,0)$ prend des valeurs positives et négatives sur un voisinage de $(0,0)$.

Ex 8 `Moyen, classique`

Une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ est dite *harmonique* si et seulement si son laplacien est nul :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

a. Montrer que la fonction $f(x,y) = \ln\|(x,y)\|$ est harmonique sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$.

b. Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ une fonction harmonique de classe $\mathcal{C}^3$. Montrer que les fonctions $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $(y\dfrac{\partial f}{\partial x} - x\dfrac{\partial f}{\partial y})$ sont aussi harmoniques.

c. Trouver toutes les fonctions $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que l'application $f(x,y) = \phi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ soit harmonique sur l'ouvert $x > 0$. (Pour c), poser $z = \dfrac{y}{x}$ et trouver une equation différentielle vérifiée par $\phi(z)$).

Corrigé des exercices

$\boxed{Q\ 1}$

a. F est une droite vectorielle. On cherche une base de F et on trouve que $F = \mathrm{Vect}(n)$ où $n = (3,1,-2)$. Par conséquent, $F^{\perp}$ est le plan vectoriel orthogonal au vecteur n. Son équation cartésienne est

$$\boxed{F^{\perp}\ : 3x + y - 2z = 0}$$

b. Faire un dessin ! Soit $X = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Décomposons x sur F et $F^{\perp}$: $x = x_F + \lambda n$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors $s(x) = x_F - \lambda n = x - 2\lambda n$. Il suffit donc de déterminer le scalaire λ. Puisque $(x_F \mid n) = 0$, il vient que $\lambda = \dfrac{(x \mid n)}{\|n\|^2}$. Finalement,

$$s(x) = x - 2\frac{(x \mid n)}{\|n\|^2}$$

Après calculs, on trouve alors que

$$\boxed{S = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \end{pmatrix}}$$

$\boxed{Q\ 2}$ Soit $x = x_1e_1 + \dots + x_ne_n \in E$. Ce vecteur est solution du problème si et seulement si ses coordonnées vérifient le système linéaire

$$\begin{cases} (e_1 \mid e_1)\,x_1 + \dots + (e_1 \mid e_n)\,x_n & = a_1 \\ \vdots & \vdots \\ (e_n \mid e_1)\,x_1 + \dots + (e_n \mid e_n)\,x_n & = a_n \end{cases}$$

La matrice de ce système est la matrice du produit scalaire dans la base e. On a vu en cours que la matrice d'un produit scalaire dans une base était toujours inversible. Ce système est donc un système de Cramer qui possède une unique solution.

$\boxed{Q\ 3}$ Continuité de f en $(0,0)$: en faisant un DL de sin, on trouve

$$|f(x,y)| = |\frac{xy^3(1+o(y)) - yx^3(1+o(x))}{6(x^2+y^2)}| \le |xy|\frac{C(x^2+y^2)}{6(x^2+y^2)} \le \frac{C}{12}(x^2+y^2) \le C'\|(x,y)\|^2$$

où l'on a utilisé le fait que $o(x)$, $o(y)$ sont des fonctions majorées sur un voisinage de 0, et que $xy \le \dfrac{x^2+y^2}{2}$ (on aurait pu également passer en coordonnées polaires en examinant l'homogénéité du numérateur et du dénominateur). Donc f est continue en $(0,0)$. D'après les théorèmes généraux, f est continue en $(x,y) \neq (0,0)$. Pour $(x,y) \neq (0,0)$, on calcule

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\sin y - y\cos x}{x^2+y^2} - \frac{2x(x\sin y - y\sin x)}{(x^2+y^2)^2}$$

et de même pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Les dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, mais lorsque $(x,y) \to (0,0)$, en faisant un DL de sin et cos,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{-y^3 + 3x^2y + y^3\varepsilon(y) + yx^2\varepsilon(x)}{6(x^2+y^2)} - \frac{x^2y(x^2(1+\varepsilon(x)) - y^2(1+\varepsilon(y))}{3(x^2+y^2)^2}$$

et en passant en coordonnées polaires, cette quantité tend vers 0 lorsque $(x,y) \to 0$. De plus,

$$\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = 0$$

et donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, donc f admet une dérivée partielle par rapport à x qui est continue en $(0,0)$. On traite de même la dérivée partielle par rapport à y et donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{Q\ 4}$ On écrit

$$f(x,y) = x\int_0^y \phi(t)dt - \int_0^y t\phi(t)dt$$

et puisque $t \mapsto \phi(t)$, $t \mapsto t\phi(t)$ sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème fondamental, $F(y) = \int_0^y \phi(t)dt$ et $G(y) = \int_0^y t\phi(t)dt$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec

$$F'(y) = \phi(y), \quad G'(y) = y\phi(y)$$

Par application des théorèmes généraux, f admet des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \int_0^y \phi(t)dt, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\phi(y) - y\phi(y)$$

qui sont encore des fonctions continues sur $\mathbb{R}^2$ par application des théorèmes généraux. Donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$\boxed{Q\ 5}$

1. **Continuité**. Soit un point $X_0 = (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. Si $y_0 \neq x_0^2$, il est clair que la fonction f est continue au point X_0 d'après les théorèmes généraux. Considérons maintenant un point de la forme $X_0 = (x_0,y_0)$ avec $y_0 = x_0^2$. Soit un point $X = (x,y)$ tel que $\|X - X_0\|_\infty \leq 1$. Puisque $|x - x_0| \leq 1$, d'après la minoration de l'inégalité triangulaire, on tire que $|x| \leq 1 + |x_0|$. De même, $|y| \leq 1 + |y_0|$. Alors, que X se trouve en dessus ou au dessous de la parabole $y = x^2$, on a la majoration suivante :

$$\left|f(x,y) - f(x_0,y_0)\right| \leq \max\left(|x^4 - x_0^4|,|y^2 - y_0^2|\right)$$

   Mais $|y^2 - y_0^2| = |y - y_0||y + y_0| \leq (1 + 2|y_0|)|y - y_0|$ et

$$|x^4-x_0^4| = |x-x_0||x^3+x^2x_0+xx_0^2+x_0^3| \leq \left[(1+|x_0|)^3+(1+|x_0|)^2|x_0|+(1+|x_0|)|x_0|^2+|x_0|^3\right]|x-x_0| = C|x-x_0|$$

   où la constante C ne dépend que de X_0. Par conséquent, $\left|f(x,y) - f(x_0,y_0)\right| \leq C\|X - X_0\|_\infty$ et donc la fonction f est continue au point X_0.
2. **Dérivées partielles**. Soit un point $X_0 = (x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. Si $y_0 \neq x_0^2$, la fonction admet des dérivées partielles au point X_0 obtenues par les théorèmes généraux :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \begin{cases} 4x_0^3 & \text{si } y_0 > x_0^2 \\ 2y_0 & \text{si } y_0 \leq x_0^2 \end{cases}$$

   Considérons maintenant un point $X_0 = (x_0,y_0)$ de la parabole, avec $y_0 = x_0^2$. Étudions le taux d'accroissement selon le vecteur $(1,0)$:

$$\phi_1(t) = \frac{f(x_0 + t,y_0) - f(x_0,y_0)}{t}$$

   (a) Si $x_0 > 0$, pour $t > 0$, le point (x_0+t,y_0) se trouve en dessous de la parabole et donc $f(x_0+t,y_0) = y_0^2$. Par conséquent, $\phi_1(t) = 0$ et donc $\phi_1(t) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$. Pour $t < 0$, le point $(x_0 + t,y_0)$ se trouve au dessus de la parabole et donc $f(x_0 + t,y_0) = (x_0 + t)^4$. Alors $\phi_1(t) = \dfrac{(x_0 + t)^4 - x_0^4}{t} \xrightarrow[t\to 0^-]{} 4x_0^3$. Comme $x_0 \neq 0$, la fonction ϕ_1 n'a pas de limite lorsque $t \to 0$ et donc la fonction f n'admet pas de dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ en (x_0,y_0).

   (b) Si $x_0 < 0$, on montre de même que f n'admet pas de dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ au point (x_0,y_0).

   (c) Si $x_0 = y_0 = 0$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$, le point $(t,0)$ se trouve en dessous de la parabole et donc $\phi_1(t) = 0$ qui tend vers 0 lorsque $t \to 0$. Par conséquent, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.

   (d) On montre de même que si $(x_0,y_0) \neq (0,0)$, la fonction f n'admet pas de dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ au point (x_0,y_0) et que $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$.

$\boxed{Q\ 6}$

La fonction $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car :

$$\left|f(X) - f(Y)\right| \leq \left|\|X\| - \|Y\|\right| \leq \|X - Y\|$$

grâce à l'inégalité triangulaire. Ensuite,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

pour $(x,y) \neq (0,0)$. Au point $(0,0)$

$$\frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \frac{|t|}{t} = sg(t)$$

qui n'a pas de limite lorsque $t \to 0$. Donc f n'admet pas de dérivée partielle par rapport à x en $(0,0)$. Même calcul pour la dérivée partielle par rapport à y.

$\boxed{Q\ 7}$ $\nabla f(M) = (0,0) \iff M = (0,0)$ ou $M = (-\frac{2}{3},0)$. Puisque $f(x,y) = x^2(1+x) + y^2 \geq \frac{1}{2}(x^2+y^2) \geq 0$ lorsque $x \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, on en déduit que $(0,0)$ est un minimum local de f (il n'est pas global, car $f(x,0) \to -\infty$ lorsque $x \to -\infty$).

Pour $M = (-\frac{2}{3},0)$: Posons $u = x + \frac{2}{3}$ et $v = y$,

$$\widetilde{f}(u,v) = (u - \frac{2}{3})^2(u - \frac{1}{3}) + v^2$$

et en calculant $\phi(t) = \widetilde{f}(t,0) = t^3 - t^2 - \frac{4}{27}$, il vient que pour $t \to 0$, $\phi(t) \leq \phi(0)$ et donc il y a des valeurs de (u,v) aussi proches de $(0,0)$ que l'on veut telles que $\widetilde{f}(u,v) \leq \widetilde{f}(0,0)$.

D'autre part, $\psi(t) = \widetilde{f}(0,t) = t^2 + \frac{4}{27}$ et il y a donc des valeurs de (u,v) aussi proche de $(0,0)$ que l'on veut pour lesquelles $\widetilde{f}(u,v) \geq \widetilde{f}(0,0)$. Donc le point $(-2/3,0)$ n'est ni un maximum local, ni un minimum local.

$\boxed{Q\ 8}$ a) et b) se montrent par le calcul. Pour c),

$$\Delta f(x,y) = \frac{1}{x^2}\left((\frac{y^2}{x^2}+1)\phi''(\frac{y}{x}) + 2\frac{y}{x}\phi'(\frac{y}{x})\right)$$

en posant $z = \frac{y}{x}$, il suffit que ϕ vérifie l'équation différentielle

$$(z^2+1)\phi''(z) + 2z\phi'(z) = 0$$

pour que f soit harmonique. En posant $\psi(z) = \phi'(z)$, ψ vérifie l'équation du premier ordre linéaire :

$$(z^2+1)\psi' + 2z\psi = 0$$

On résout et on trouve

$$\psi(t) = \frac{C}{z^2+1} \Rightarrow \psi(t) = C \arctan z + C'$$

et donc les fonctions

$$f(x,y) = C \arctan(\frac{y}{x}) + C'$$

sont harmoniques sur l'ouvert $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$.