1 Intégrales doubles

Ex 1 `Facile`

Calculer l'intégrale double

$$I = \iint_U \frac{\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y}{x^2+y^2+1} \qquad U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$$

Ex 2 `Facile`

Calculer l'intégrale double

$$I = \iint_U \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \quad U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$$

Ex 3 `Facile`

Calculer directement, puis avec un changement de variables, l'intégrale double

$$I = \iint_D (x+y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1\}$$

Ex 4 `Moyen`

Déterminez le centre de gravité d'une plaque homogène limitée par une cardioïde.

Ex 5 `Moyen`

On considère quatre réels $0 < \alpha < \beta$ et $0 < \lambda < \mu$ et le domaine plan

$$D = \{(x,y) \in]0,+\infty[^2 \mid \alpha \leq \frac{y}{x} \leq \beta;\ \lambda \leq xy \leq \mu\}$$

a. Dessiner le domaine D.

b. Calculer l'aire du domaine D en effectuant le changement de variables défini par

$$\begin{cases} u &= \dfrac{y}{x} \\ v &= xy \end{cases}$$

2 Propriétés métriques des courbes

Ex 6 `classique`

On considère une courbe passant par l'origine, et tangente à l'axe (Ox) d'équation :

$$(C) \quad y = f(x)$$

avec f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un voisinage de 0 et $f(0) = f'(0) = 0$ et $f''(0) \neq 0$.

a. Déterminer le rayon de courbure à la courbe (C) au point $(0,0)$.

b. On considère la famille de cercles centrés en $\Omega\left|\begin{matrix}0\\ \lambda\end{matrix}\right.$ passant par le point 0. Au voisinage de 0, on peut écrire l'équation de la branche de ce cercle passant par l'origine sous la forme :

$$(\mathcal{C}_\lambda) \quad y = g(x)$$

Déterminer λ pour que l'on aît $g(x) - f(x) = o(x^2)$.

Ex 7 `moyen`

On considère une hyperbole équilatère $\mathcal{H}$ et un point M de cette hyperbole. On note I le centre de courbure à l'hyperbole au point M. La normale à l'hyperbole au point M recoupe l'hyperbole en un autre point N. Montrez que

$$\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{MI}$$

Ex 8 `moyen`

Déterminer la développée (ensemble des centres de courbures) de la cardioïde d'équation polaire

$$\rho = a(1+\cos\theta) \quad (a>0)$$

Ex 9 `Difficile`

Déterminer la développée d'une ellipse d'équation

$$(E) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ex 10 `Moyen, calculatoire`

Dans le plan euclidien orienté muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère une parabole $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne :

$$\mathcal{P} \ : y^2 = 2px \quad (p>0)$$

avec comme paramétrisation :

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{t^2}{2p} \\ y(t) &= t \end{cases}$$

On rappelle que les coordonnées du foyer F sont $F \left| \begin{matrix} p/2 \\ 0 \end{matrix} \right.$.

a. Soit un point $M(t)$ de la parabole $\mathcal{P}$. Déterminer le rayon de courbure $r(t)$ au point $M(t)$.

b. On note $I(t) = M(t) + r(t)\overrightarrow{N(t)}$ le centre de courbure à la parabole au point $M(t)$ où $\overrightarrow{N}$ est le vecteur normale unitaire au point $M(t)$. Déterminer les coordonnées du point $I(t)$ en fonction de t.

b. Étudier la courbe Γ décrite par $I(t)$ lorsque le point $M(t)$ décrit la parabole en étudiant les points stationnaires. (On ne demande pas d'étudier les branches infinies ni de tracer Γ pour l'instant).

c. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec Γ.

d. On note F le foyer de la parabole $\mathcal{P}$, M un point de la parabole, I le centre de courbure à la parabole au point M et P le projeté orthogonal de I sur la droite (FM). Montrer que F est le milieu du segment $[MP]$.

e. Tracer sur une même figure la parabole $\mathcal{P}$, la courbe Γ, son foyer F, un point $M \in \mathcal{P}$ et le centre de courbure I associé.

f. Trouver une équation cartésienne de Γ de la forme $x = f(y)$.

g. Calculer l'aire du domaine borné délimité par les deux courbes $\mathcal{P}$ et Γ.

Corrigé des exercices

$\boxed{Q\ 1}$ En polaires, $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$,

$$I = \int_0^{2\pi} \Big[\int_0^1 \frac{\rho}{\rho^2+1}\,\mathrm{d}\rho\Big]\,\mathrm{d}\theta = \boxed{\pi\ln 2}$$

$\boxed{Q\ 2}$ Par le changement de variables $x = a\rho\cos\theta$, $y = b\rho\sin\theta$, le jacobien vaut $J = ab\rho$ et alors

$$I = \iint_{[0,1]\times[0,2\pi]} \frac{ab}{\rho}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \boxed{2\pi ab}$$

$\boxed{Q\ 3}$

$$I = \int_0^1 \Big[\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x+y)\,\mathrm{d}y\Big]\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}$$

En passant en coordonnées polaires,

$$I = \iint_{[0,1]\times[0,\frac{\pi}{2}]} \rho(\cos\theta+\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{3}$$

$\boxed{Q\ 4}$ Notons σ la densité massique constante de la plaque. La cardioïde a pour équation polaire :

$$\rho = a(1+\cos\theta)$$

Déterminons la masse de la plaque :

$$M = \iint_D \sigma\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

En passant en coordonnées polaires, on trouve

$$M = 2\sigma\int_0^{\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)} \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = 16a^2\sigma\int_0^{\pi/2}\cos^4\phi\,\mathrm{d}\phi = 16a^2\sigma I_4$$

en utilisant les intégrales de Wallis :

$$I_n = \int_0^{\pi/2}\cos^n\phi\,\mathrm{d}\phi$$

qui vérifient la relation de récurrence

$$\forall n \geq 2,\quad \frac{I_n}{I_{n-2}} = \frac{n-1}{n}$$

Par symétrie, le centre de gravité de la plaque se trouve sur l'axe $(0x)$, et son abscisse est donnée par

$$x_I = \frac{1}{M}\iint_D x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

En passant en coordonnées polaires :

$$x_I = \frac{1}{16a^2I_4}\int_0^{2\pi}\int_0^{a(1+\cos\theta)} \rho^2\cos\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta = \frac{2a}{3}\frac{I_6}{I_4}\big(2\frac{I_8}{I_6}-1\big)$$

et on trouve finalement $x_I = \dfrac{5}{6}a$.

$\boxed{Q\ 5}$ Le domaine D est délimité par les deux droites d'équation $y = \alpha x$, $y = \beta y$ et les deux hyperboles d'équation $xy = \lambda$, $xy = \mu$. Exprimons x et y en fonction de u et v :

$$x = \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{u}} \quad y = \sqrt{uv}$$

On calcule alors le jacobien :

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} -\dfrac{\sqrt{v}}{2u^{3/2}} & \dfrac{1}{2\sqrt{uv}} \\ \dfrac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \dfrac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2u}$$

et après changement de variables,

$$\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \Big[\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}u}{2u}\Big]\Big[\int_\lambda^\mu \mathrm{d}v\Big] = \boxed{\frac{(\mu-\lambda)\ln\big(\beta/\alpha\big)}{2}}$$

$\boxed{Q\ 6}$

a. On calcule le rayon de courbure au point O par

$$r = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{dx} \times \frac{dx}{d\alpha}$$

et puisque $\dfrac{ds}{dx} = \sqrt{1+f'^2(0)}$ et que $\tan\alpha(t) = f'(t)$, en dérivant, on trouve que

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{f''(t)}{1+f'^2(t)}$$

Donc le rayon de courbure en 0 vaut :

$$r = \frac{\big(1+f'^2(0)\big)^{3/2}}{f''(0)} = \frac{1}{f''(0)}$$

b. L'équation cartésienne d'un cercle centré en Ω et passant par l'origine s'écrit

$$y^2 - 2\lambda y + x^2 = 0$$

d'où l'on tire localement au voisinage de 0 :

$$y = g(x) = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - x^2} = \lambda\Big[1 - \big(1-(x/\lambda)^2\big)^{1/2}\Big]$$

En effectuant un $DL(0,2)$ de la fonction g, on trouve

$$g(x) = \frac{x^2}{2\lambda} + o(x^2)$$

Et donc

$$g(x) - f(x) = \Big[f''(0) - 1/\lambda\Big]\frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Pour avoir un contact d'ordre supérieur à 2 des deux courbes, il faut donc que $\lambda = \dfrac{1}{f''(0)} = r$.

$\boxed{Q\ 7}$ Considérons le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ défini par les asymptotes à l'hyperbole. Dans ce repère l'équation de l'hyperbole est

$$(\mathcal{H}): \quad xy = 1$$

Soit $M\left|\begin{matrix} x \\ 1/x \end{matrix}\right.$ un point de l'hyperbole. Comme le vecteur $\overrightarrow{u}\left|\begin{matrix} 1 \\ -1/x^2 \end{matrix}\right.$ dirige la tangente à l'hyperbole au point M, le vecteur $\overrightarrow{n}\left|\begin{matrix} 1 \\ x^2 \end{matrix}\right.$ dirige la normale. On a $N = M + \lambda\overrightarrow{n}$ avec $N \in \mathcal{H}$. On tire

$$N\left|\begin{matrix} -1/x^3 \\ -x^3 \end{matrix}\right. \quad \text{et } \overrightarrow{NM}\left|\begin{matrix} \dfrac{x^4+1}{x^3} \\ \dfrac{x^4+1}{x} \end{matrix}\right.$$

Pour déterminer le centre de courbure au point M, calculons le rayon de courbure défini par

$$R = \frac{ds}{d\alpha} = \frac{ds}{dx} \times \frac{dx}{d\alpha}$$

Comme

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1+1/x^4} = \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^2}$$

et que

$$\tan\alpha(x) = -1/x^2 \Rightarrow \frac{d\alpha}{dx} = \frac{2x}{x^4+1}$$

on tire

$$R = \frac{(x^4+1)^{3/2}}{x^4+1}$$

et puisque le vecteur normale unitaire au point M s'écrit

$$\overrightarrow{N}\left|\begin{array}{l} 1/\sqrt{x^4+1} \\ x^2/\sqrt{x^4+1} \end{array}\right.$$

on détermine

$$\overrightarrow{MI} = R.\overrightarrow{N} = \left|\begin{array}{l} \dfrac{x^4+1}{2x^3} \\ \dfrac{x^4+1}{2x} \end{array}\right. = \frac{1}{2}\overrightarrow{NM}$$

$\boxed{Q\ 8}$ On trouve en notant $I\left|\begin{array}{l} x_I \\ y_I \end{array}\right.$ le centre de courbure au point $M(\theta)$ que

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{2a}{3} + \dfrac{a}{3}(1-\cos\theta)\cos\theta \\ y_I = \dfrac{a}{3} + \dfrac{a}{3}(1-\cos\theta)\sin\theta \end{cases}$$

et donc si l'on se place dans le repère $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ où $A\left|\begin{array}{l} 2a/3 \\ a/3 \end{array}\right.$, l'équation polaire de la développée est

$$\rho = \frac{a}{3}\big(1-\cos\theta\big)$$

On trouve une cardioïde (par une rotation d'angle π).

$\boxed{Q\ 9}$ Paramétrons l'ellipse :

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t \\ y(t) = b\sin t \end{cases}$$

Si α désigne l'angle entre l'horizontale et le vecteur tangente unitaire au point $M(t)$,

$$\tan\alpha = \frac{b}{a}\tan(t+\pi/2)$$

et en dérivant,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{ab}{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}$$

D'où l'on tire, si x_I et y_I désignent les coordonnées du centre de courbure :

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t = c\cos^3 t \\ y_I = \dfrac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t = (-a/b)c\sin^3 t \end{cases}$$

En notant $c = \dfrac{a^2-b^2}{a}$. Par conséquent, la développée de l'ellipse est l'image par l'affinité de rapport $-a/b$ par rapport à (Oy) de l'astroïde d'équation paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = c\cos^3 t \\ y(t) = c\sin^3 t \end{cases}$$

$\boxed{Q\ 10}$

a. Notons $\alpha(t) = \measuredangle(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{T})$ l'angle orienté entre le vecteur $\overrightarrow{i}$ et le vecteur tangente unitaire. Par définition, la courbure au point $M(t)$ vaut $c(t) = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} \times \dfrac{1}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}$ où s est une abscisse curviligne sur $\mathcal{P}$. On calcule

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \frac{\sqrt{t^2+p^2}}{p}$$

Et puisque $\tan\alpha(t) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)} = \dfrac{p}{t}$ en dérivant, on tire $\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{p}{t^2+p^2}$. Finalement

$$c(t) = -\frac{p^2}{(t^2+p^2)^{3/2}} \text{ et } \boxed{r(t) = \frac{1}{c(t)} = -\frac{(t^2+p^2)^{3/2}}{p^2}}$$

b. Le vecteur tangente unitaire vaut $\overrightarrow{T}(t) = \dfrac{\overrightarrow{F'}(t)}{\|\overrightarrow{F'}(t)\|}$ et puisque $\overrightarrow{T}(t)\left|\begin{matrix}\cos\alpha(t)\\ \sin\alpha(t)\end{matrix}\right.$, $\overrightarrow{N(t)}\left|\begin{matrix}-\sin\alpha(t)\\ \cos\alpha(t)\end{matrix}\right.$, après calculs, on trouve :

$$\overrightarrow{N}(t)\frac{p}{\sqrt{t^2+p^2}}\left|\begin{matrix}-1\\ t/p\end{matrix}\right.$$

Puis on tire les coordonnées de $I(t)$:

$$\boxed{I(t)\left|\begin{matrix}\dfrac{3t^2+2p^2}{2p}\\ -\dfrac{t^3}{p^2}\end{matrix}\right.}$$

c. Étudions la courbe paramétrée définie par

$$\begin{cases} x_I &= \dfrac{3}{2}t^2 + p \\ y_I &= -\dfrac{t^3}{p^2}\end{cases}$$

Puisque $x_I(-t) = x_I(t)$ et $y_I(-t) = -y_I(t)$, on en déduit que le point $I(-t)$ est le symétrique du point $I(t)$ par rapport à (Ox). Il suffit d'étudier Γ pour $t \geq 0$ et de compléter ensuite par une symétrie par rapport à (Oy). On a

$$\begin{cases} x_I'(t) &= \dfrac{3t}{2} \\ y_I'(t) &= -\dfrac{3t^2}{p^2}\end{cases}$$

Puisque

$$I(t) = \left|\begin{matrix}p\\ 0\end{matrix}\right. + t^2\left|\begin{matrix}3/2p\\ 0\end{matrix}\right. + t^3\left|\begin{matrix}0\\ -1/p^2\end{matrix}\right.$$

on en déduit que le point $M(0)\left|\begin{matrix}p\\ 0\end{matrix}\right.$ est un point de rebroussement de première espèce.

c. Un point $I(t)$ appartient à la parabole si et seulement si $y_I^2(t) = 2px_I(t)$, c'est à dire $\dfrac{t^6}{p^4} = 3t^2 + 2p^2$ ou encore

$$\frac{t^6}{p^6} - 3\frac{t^2}{p^2} - 2 = 0$$

En notant $u = \dfrac{t^2}{p^2}$, u doit vérifier :

$$u^3 - 3u - 2 = 0 \text{ c'est à dire } (u+1)(u^2-u-2) = 0$$

Donc $t = \pm\sqrt{2}p$ et les deux points d'intersection sont donc

$$\boxed{I_1\left|\begin{matrix}p+3\\ -2\sqrt{2}p\end{matrix}\right.} \quad \boxed{I_2\left|\begin{matrix}p+3\\ 2\sqrt{2}p\end{matrix}\right.}$$

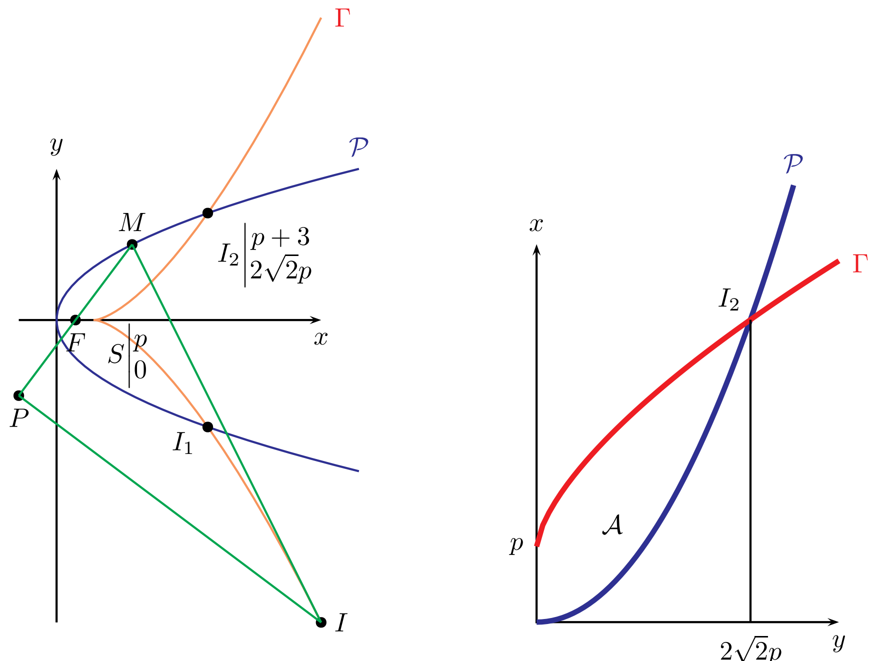
d. Déterminons le symétrique de M par rapport à $F\left|\begin{matrix}p/2\\0\end{matrix}\right.$: $P = M + 2\overrightarrow{MF}$. On trouve

$$\overrightarrow{MF}\left|\begin{matrix}\dfrac{p^2-t^2}{2p}\\ -t\end{matrix}\right. ,\ P\left|\begin{matrix}\dfrac{2p^2-t^2}{2p}\\ -t\end{matrix}\right. \quad \text{et } \overrightarrow{IP}\left|\begin{matrix}-\dfrac{2t^2}{p}\\ \dfrac{t(t^2-p^2)}{p^2}\end{matrix}\right.$$

Par conséquent,

$$\left(\overrightarrow{IP} \mid \overrightarrow{MF}\right) = -\frac{t^2}{p^2}(p^2-t^2) - \frac{t^2}{p^2}(t^2-p^2) = 0$$

e. Voir la figure 1. Nous avons montré une construction géométrique du centre de courbure en un point de la parabole.



(a) Construction géométrique du centre de courbure à une parabole

(b) Calcul de l'aire

FIG. 1 – *Parabole et sa développée*

f. Il suffit d'éliminer le paramètre t : $t = -p^{2/3}y^{1/3}$ et en reportant dans $x_I(t)$, on trouve

$$\boxed{x = \frac{3}{2}p^{1/3}y^{2/3} + p}$$

g. Les deux courbes $\mathcal{P}$ et Γ possèdent une équation cartésienne $x = f(y)$. L'aire délimité par ces deux courbes s'écrit donc comme une différence d'intégrales simples (tourner la figure !). Par symétrie, l'aire cherchée est le double de l'aire entre $y = 0$ et $y = 2\sqrt{2}p$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= 2\Big(\int_0^{2\sqrt{2}p} \big(\frac{3}{2}p^{1/3}y^{2/3} + p\big)\,\mathrm{d}y - \int_0^{2\sqrt{2}p} \frac{y^2}{2p}\,\mathrm{d}y\Big)\\
&= 2\Big(\frac{9}{10}p^{1/3}\Big[y^{5/3}\Big]_0^{2\sqrt{2}p} + 2\sqrt{2}p^2 - \frac{1}{6p}\Big[y^3\Big]_0^{2\sqrt{2}p}\Big)\\
&= \boxed{\frac{88}{15}\sqrt{2}p^2}
\end{aligned}$$