Ex 1 `Facile`

Soit un espace préhilbertien réel E et deux vecteurs $x,y \in E$.
a) Développer l'expression

$$\left\| \|y\|^2 . x - (x \mid y) . y \right\|^2$$

b) Retrouver l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que le cas d'égalité.

Ex 2 `Cours, à faire`

Sur l'espace des polynômes à coefficients réels de degré inférieur à 2, $E = \mathbb{R}_2[X]$, on définit

$$(P \mid Q) = P(1)Q(1) + P(0)Q(0) + P(-1)Q(-1)$$

Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire, et trouver une base orthogonale pour ce produit scalaire.

Ex 3 `Cours, à faire`

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de son produit scalaire usuel, on considère les vecteurs $v_1 = (0,3,1,-1)$ et $v_2 = (1,2,-1,1)$. Soit F le s.e.v. engendré par ces deux vecteurs. Déterminer un système d'équations de $F^\perp$ puis une bon de $F^\perp$.

Ex 4 `Moyen`

Soit E un espace préhilbertien réel, et $B = (e_1, \dots, e_n)$ un système de vecteurs de E de norme 1 tels que :

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^{n} (x \mid e_k) . e_k$$

a) Montrer que si $i \neq j$, alors $(e_i \mid e_j) = 0$
b)Montrer que B est une base orthonormale de E.

Ex 5 `Technique classique, moyen`

Soient E un espace préhilbertien réel et une application $f : E \mapsto E$ vérifiant $f(0) = 0$ et

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$$

a) Montrer que $\forall (x,y) \in E^2$, $\|f(x)\| = \|x\|$ et $(f(x) \mid f(y)) = (x \mid y)$.
b) Calculer $\|f(\lambda x + \mu y) - \lambda f(x) - \mu f(y)\|^2$ et en déduire que l'application f est linéaire.

Ex 6 `Moyen, classique`

Pour deux matrices $A,B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ on définit :

$$(A \mid B) = \mathrm{Tr}(A^t B)$$

a) Montrer que $(. \mid .)$ est un produit scalaire sur l'espace des matrices carrées $E = \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
b) Montrer que l'ensemble des matrices symétriques et l'ensemble des matrices antisymétriques forment deux sous-espaces orthogonaux pour ce produit scalaire.

c) Déterminer la projection orthogonale d'une matrice A sur l'espace des matrices antisymétriques.

Ex 7 `Moyen`

Soit $(. \mid .)$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, e la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et A la matrice de ce produit scalaire dans la base canonique.
a) Lorsque $n = 2$, montrer que $\mathrm{Tr}(A) > 0$ et $\det(A) > 0$.
b) Lorsque $n \geq 3$, montrer que $\mathrm{Tr}(A) > 0$ et $\det(A) > 0$.
c) Montrer que $\forall p \geq 2$, A^p est une matrice symétrique définie positive (et donc qu'elle définit également un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$). On distinguera les cas p pair et impair.

Ex 8 `Cours, à faire`

Sur l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$, on définit pour deux polynômes $(P,Q) \in E^2$,

$$(P \mid Q) = \int_0^1 t P(t) Q(t) \, \mathrm{d}t$$

a) Vérifier que c'est un produit scalaire.
b) Déterminer une base orthonormale du sous-espace $F = \mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.
c) Déterminer le projeté orthogonal du polynôme $P = X^3$ sur le sous-espace F.

Ex 9 `Cours, à faire`

Soit $(E,n,(.\mid.))$ un espace euclidien et un vecteur $x\in E$. Soit un vecteur non-nul $a\in E$. On définit la droite vectorielle $D=Vect(a)$ et son orthogonal $H=D^{\perp}$. Exprimer les distances $d(x,H)$ et $d(x,D)$ en fonction de la norme du vecteur x et du produit scalaire $(x\mid a)$.

Ex 10 `Moyen`

On considère une matrice $A=((a_{ij}))_{1\le i,j\le n}\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive.

a. Montrer que $\forall i\in [\![1,n]\!]$, $a_{ii}>0$.

b. On considère pour $k\in [\![1,n]\!]$, la matrice extraite $A_k=((a_{ij}))_{1\le i,j\le k}\in\mathfrak{M}_k(\mathbb{R})$. Montrer que A_k est symétrique définie positive.

c. Montrer par récurrence que toute matrice symétrique définie positive se décompose sous la forme $A=L\,{}^tL$ où L est une matrice trianglulaire inférieure inversible. Cette décomposition s'appelle la *décomposition de Choleski* de la matrice A.

Corrigé des exercices

$\boxed{Q\ 1}$ En développant, on trouve

$$\|y\|^4\|x\|^2 - 2\left(x \mid y\right)^2 \|y\|^2 + \left(x \mid y\right)^2 \|y\|^2 \geq 0$$

Donc si $y \neq 0$, en divisant par $\|y\|^2$, on retrouve Cauchy-Schwarz :

$$\left(x \mid y\right)^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2$$

avec le cas d'égalité qui correspond à $\|y\|^2 x = \left(x \mid y\right) y$, ce qui implique que (x,y) est un système lié.

$\boxed{Q\ 2}$ La seule difficulté consiste à montrer que $(.\mid.)$ est défini. Si un polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ vérifie $(P \mid P) = 0$, alors $P(1) = P(0) = P(-1) = 0$, et donc le polynôme P admet trois racines distinctes. Comme $\deg(P) \leq 2$, $P = 0$. Pour trouver une base orthonormale, on utilise l'algorithme de Schmidt en redressant la base canonique $(1,X,X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$. On calcule $\|1\| = \sqrt{3}$ et donc $\varepsilon_1 = 1/\sqrt{3}$. Ensuite, on cherche f_2 sous la forme $f_2 = X - \lambda\varepsilon_1$ avec la condition $(\varepsilon_1 \mid f_2) = 0$. On trouve que $\lambda = (X \mid \varepsilon_1) = 1 + 0 - 1 = 0$, d'où $f_2 = X$ et puisque $\|X\| = \sqrt{2}$, $\varepsilon_2 = X/\sqrt{2}$. Ensuite, on cherche $f_3 = X^2 - \lambda\varepsilon_1 - \mu\varepsilon_2$ avec les conditions $\lambda = \left(X^2 \mid \varepsilon_1\right) = 2/\sqrt{3}$ et $\mu = \left(X^2 \mid \varepsilon_2\right) = 0$ d'où $f_2 = X^2 - 2/3$. En normalisant, on trouve $\varepsilon_3 = (\sqrt{3}/\sqrt{2})(X^2 - 2/3)$.

$\boxed{Q\ 3}$ Soit un vecteur $X = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$. Alors

$$X \in F^{\perp} \iff (X \mid v_1) = (X \mid v_2) = 0 \iff (3y + z - t = 0 \text{ et } x + 2y - z + t = 0)$$

On a donc trouvé un système d'équations de $F^{\perp}$. On calcule ensuite une base de $F^{\perp}$: $e_1 = (0,0,1,1)$, $e_2 = (-5,1,0,3)$. On redresse cette base en utilisant l'algorithme de Schmidt : $\varepsilon_1 = (1/\sqrt{2})(0,0,1,1)$, $\varepsilon_2 = (\sqrt{2}/\sqrt{61})(-5,1,3/2,3/2)$ et alors $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ est une bon de $F^{\perp}$.

$\boxed{Q\ 4}$ Soit $i \in [1,n]$. On écrit

$$e_i = \sum_{k=1}^{n} \left(e_i \mid e_k\right).e_k \Rightarrow \left(e_i \mid e_i\right) = \sum_{k\neq i} \left(e_i \mid e_k\right)^2 + \left(e_i \mid e_i\right)^2 \Rightarrow \sum_{k\neq i} \left(e_i \mid e_k\right)^2 = 0$$

(car $\|e_i\| = 1$). Donc $\forall i \neq k$, $(e_i \mid e_k) = 0$. Le système est donc formé de vecteurs orthogonaux deux à deux. D'après le cours, il est libre. Par définition, le système est générateur. On a donc une base orthonormale.

$\boxed{Q\ 5}$ a) Faire $x = 0$ et utiliser l'identité de polarisation.

b) En développant et en utilisant a), on trouve que cette quantité est nulle.

$\boxed{Q\ 6}$ Si $A = ((a_{ij}))$ et $B = ((b_{ij}))$, on calcule

$$(A \mid B) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$$

a) Donc $(A \mid A) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{ij}^2$. On en déduit que $(.\mid.)$ est positive et définie. La bilinéarité et la symétrie ne posent pas de problèmes.

b) $(A \mid B) = \mathrm{Tr}(A^t B) = \mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}({}^t(A^t B)) = \mathrm{Tr}(B^t A) = \mathrm{Tr}({}^t AB) = -\mathrm{Tr}(AB)$ et on en tire que $(A \mid B) = 0$. Par conséquent, les sous-espaces formés des matrices symétriques et antisymétriques sont orthogonaux :

$$\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$$

c) On reprend la décomposition d'une matrice quelconque en une somme d'une matrice antisymétrique et d'une matrice symétrique vue en cours :

$$A = \frac{1}{2}(A - {}^tA) + \frac{1}{2}(A + {}^tA)$$

Alors le projeté orthogonal de la matrice A est la composante antisymétrique : $p(A) = \dfrac{1}{2}(A - {}^tA)$.

$\boxed{Q\ 7}$ a) $A = \begin{pmatrix} (e_1 \mid e_1) & (e_1 \mid e_2) \\ (e_2 \mid e_1) & (e_2 \mid e_2) \end{pmatrix}$. Par conséquent

$$\mathrm{Tr}(A) = \|e_1\|^2 + \|e_2\|^2 > 0 \quad \det(A) = \|e_1\|^2\|e_2\|^2 - \left(e_1 \mid e_2\right)^2 > 0$$

En effet, par Cauchy-Schwarz on obtient $\det(A) \geq 0$ et si $\det(A) = 0$, les vecteurs e_1,e_2 seraient liés ce qui est faux.

b) Utilisons le théorème de Schmidt : il existe une base ε orthonormale. Alors la matrice du produit scalaire dans cette base vaut I_n. D'après les formules de changement de bases pour les matrices de produits scalaires, en notant la matrice de passage $P = P_{\varepsilon \mapsto e}$, on a

$$A = {}^tPI_nP = {}^tPP$$

et alors $\det(A) = \det(P)^2 > 0$ (car P est inversible). D'autre part,

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|^2 > 0$$

c) La matrice A^n est symétrique et inversible : si $X \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$ vérifie $AX = 0$, alors ${}^tXAX = 0$ et donc $X = 0$ puisque A est définie. Donc $\det(A^n) = \det(A)^n \neq 0$ et donc A^n est aussi inversible.

1. $p = 2k$: Soit $X \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$.
$$\alpha = {}^tXA^{2k}X = {}^t(A^kX)I_n(A^kX)$$
et donc puisque $(A^kX) \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$ et que I_n est définie positive, $\alpha = 0$. De plus, si ${}^tXA^{2k}X = 0$, il vient alors que $A^kX = 0$ et puisque on a vu que A^k était inversible, $X = 0$. Donc A^{2k} est définie positive.
2. $p = 2k + 1$: soit $X \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$.
$$\alpha = {}^tXA^{2k+1}X = {}^t(A^kX)A(A^kX)$$
et par le même raisonnement, puisque A est définie positive, on trouve que $\alpha \geq 0$ donc que A^{2k+1} est positive et que si ${}^tXA^{2k+1}X = 0$, alors $A^kX = 0$ et que $X = 0$ (car A^k est inversible). Donc A^{2k+1} est également définie.

Q 8 Utilisons l'algorithme de Schmidt pour redresser la base canonique de F. $e_0 = 1$, $e_1 = X$, $e_2 = X^2$. On trouve $\|e_0\| = 1/\sqrt{2}$ donc $\varepsilon_0 = \sqrt{2}$. Ensuite on trouve $\varepsilon_1 = 6(X - 2/3)$ puis $\varepsilon_2 = 10\sqrt{6}(X^2 - 6/5X + 9/30)$. On détermine alors $p(P) = a_2\varepsilon_2 + a_1\varepsilon_1 + a_0\varepsilon_0$ et les conditions d'orthogonalité donnent : $a_0 = (P \mid \varepsilon_0) = (\sqrt{2}/5)$, $a_1 = (P \mid \varepsilon_1) = 1/5$, $a_2 = (P \mid \varepsilon_2) = \sqrt{6}/35$ et alors le projeté orthogonal vaut

$$p(P) = \frac{4}{35} - \frac{6}{7}t + \frac{12}{7}t^2$$

Q 9 Notons $p(x)$ le projeté orthogonal du vecteur x sur le sous-espace H. Alors $d(x,H) = \|x - p(x)\|$ et $d(x,D) = \|p(x)\|$. Ecrivons que $x = \lambda.a + p(x)$. Alors $(x \mid a) = \lambda\|a\|^2 + (p(x) \mid a) = \lambda\|a\|^2$. On tire donc $\lambda = \dfrac{(x \mid a)}{\|a\|^2}$ puis successivement

$$p(x) = x - \frac{(x \mid a)}{\|a\|^2}.a, \quad d(x,D) = \frac{|(x \mid a)|}{\|a\|}, \quad d(x,H) = \frac{\sqrt{\|x\|^2\|a\|^2 - (x \mid a)^2}}{\|a\|}$$

(la quantité sous la racine est positive d'après Cauchy-Schwarz).

Q 10

a. Considérons la matrice colonne X_k avec un 1 sur la ième ligne et des zéros ailleurs. On calcule
$${}^tX_kAX_k = a_{kk} > 0$$
b. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Montrons que la matrice A_k est définie positive. Soit $X \in \mathfrak{M}_k(\mathbb{R})$. En complétant avec $(n - k)$ lignes de zéros cette matrice colonne, on forme une matrice colonne $X' \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Alors par le calcul,
$${}^tXA_kX = {}^tX'AX \geq 0$$
avec égalité si et seulement si $X = 0$.
c. Pour une matrice 1×1, $A = (\alpha)$, puisque $\alpha > 0$, il suffit de poser $L = (\sqrt{\alpha})$ pour avoir le résultat. Supposons la propriété vraie à l'ordre $(n - 1)$ et montrons la décomposition à l'ordre n. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Écrivons
$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & C \\ {}^tC & a_{nn} \end{pmatrix}$$

où $C \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$, $A_{n-1} \in \mathfrak{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ est définie positive d'après b. et $a_{nn} > 0$ d'après a. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une matrice triangulaire inférieure inversible $L' \in \mathfrak{M}_{n-1}(\mathbb{R})$ telle que $A_{n-1} = L'{}^tL'$. Cherchons L sous la forme :

$$L = \begin{pmatrix} L' & 0 \\ {}^tD & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{où } D \in \mathfrak{M}_{n-1,1}(\mathbb{R}),\ \alpha \in \mathbb{R}$$

En effectuant le produit par blocs, on trouve

$$L{}^tL = \begin{pmatrix} L'{}^tL' & L'D \\ {}^tD{}^tL' & \alpha^2 \end{pmatrix}$$

Posons donc $\alpha = \sqrt{a_{nn}}$, et définissons la matrice colonne D par $D = L'^{-1}C$ (la matrice L est inversible d'après l'hypothèse de récurrence). Alors on a $A = L{}^tL$, avec $\det(L) = \alpha \det(L') \neq 0$ ce qui montre que L est une matrice triangulaire inférieure inversible.

Remarque : on a montré ce résultat en cours, en utilisant l'algorithme de Schmidt. Dans cet exercice, on a trouvé un algorithme (récursif) qui permet d'obtenir la décomposition par le calcul matriciel.