1 Fractions rationnelles

Ex 1 `Cours`

écomposer dans $\mathbb{R}(X)$:

$$F(X) = \frac{1}{(X^2+1)(X-1)^4}$$

Ex 2 `Cours`

écomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$, $F(X) = \dfrac{X^{n-1}}{X^n - 1}$.

Ex 3 `Cours`

) Décomposer dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction $\dfrac{1}{X(X+1)}$

b) En déduire la décomposition dans $\mathbb{R}(X)$ de

$$\frac{1}{X^3(X^3+1)}$$

Ex 4 `À faire`

n considère une fraction rationnelle avec un pôle double :

$$F = \frac{U}{(X-a)^2 V_1} \qquad V(a) \neq 0$$

La décomposition en éléments simples s'écrit

$$F = \frac{\alpha}{X-a} + \frac{\beta}{(X-a)^2} + \frac{U_1}{V_1}$$

En définissant la fraction $G = (X-a)^2 F = \dfrac{U}{V_1}$, exprimer les coefficients α et β à l'aide de G. Généraliser à un pôle multiple.

Ex 5 `Adaptation du cours`

oit $F(X) = \dfrac{U(X)}{V(X)}$ On suppose que a est un pôle double de F. Exprimer les coefficients associés à ce pôle double en ne calculant pas de quotient de V par $(X-a)^2$.

Ex 6 `Moyen`

n considère un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ ayant n racines distinctes notées $x_1, \dots, x_n$. Soit un complexe $a \in \mathbb{C}$ tel que $P(a) \neq 0$. Exprimer les sommes

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a - x_k} \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(a-x_k)^2}$$

en fonction de P,P' et a.

Ex 7 `Moyen, exercice d'oral`

écomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{n!}{X(X+1)\dots(X+n)}$$

En déduire l'identité :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p}{p} \binom{n}{p} = -\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p}$$

2 Primitives

Ex 8 `Calcul classique`

alculer pour un entier $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$$

Ex 9 `Cours, à faire`

alculer $\int_0^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$.

Ex 10 `Cours, à faire`

alculer la primitive $\int \dfrac{1}{x(x^2+x+1)^2}$.

Ex 11 `Cours`

alculer la primitive (préciser l'intervalle)

$$F = \int \frac{x^4}{(x+1)^2(x^2+1)} dx$$

Ex 12 `Cours`

tudier la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \sqrt{\frac{k}{k+n}}$$

Ex 13 `Cours`

alculer l'intégrale

$$I = \int_1^2 \sqrt{\frac{t-1}{t+1}} \frac{dt}{t}$$

Ex 14 `Moyen`

alculer une primitive de

$$F = \int (x+1)^2 \sqrt{-x^2-2x+1} dx$$

(préciser l'intervalle)

Ex 15 `Moyen`

alculer la primitive

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}$$

sur l'intervalle $I =]1, +\infty[$.

Ex 16 `Moyen`

alculer l'intégrale

$$I = \int_2^3 \frac{dx}{x + \sqrt{x-1}}$$

Corrigé des exercices

$\boxed{Q\ 1}$ Puisque $\deg F = -6 < 0$, il n'y a pas de partie entière et la décomposition de F en éléments simples s'écrit:

$$F = \frac{a_1}{X-1} + \frac{a_2}{(X-1)^2} + \frac{a_3}{(X-1)^3} + \frac{a_4}{(X-1)^4} + \frac{\alpha X + \beta}{X^2+1}$$

Cherchons les coefficients associés au pôle multiple en utilisant la méthode du DL. Posons $y = x-1$ et calculons

$$f(y) = \frac{1}{y^4(2+2y+y^2)} = \frac{1}{2y^4}\frac{1}{1+(y+\frac{y^2}{2})}$$

On effectue ensuite le DL(3,0) de $\dfrac{1}{1+u}$ avec $u = y + \frac{y^2}{2}$:

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \dots$$

$$f(y) = \frac{1}{2y^4}\left(1-(y+\frac{y^2}{2})+(y+\frac{y^2}{2})^2-(y+\frac{y^2}{2})^3+\dots\right) = \frac{1}{2y^4}\left(1-y+\frac{y^2}{2}+0.y^3+\dots\right) = \frac{1}{2y^4}-\frac{1}{2y^3}+\frac{1}{4y^2}+\dots$$

(on ne garde dans la parenthèse que les termes de degré ≤ 3) et alors $a_1 = 0$, $a_2 = \dfrac{1}{4}$, $a_3 = -\dfrac{1}{2}$, $a_4 = \dfrac{1}{2}$.
Ensuite, en multipliant F par x en en faisant $x \to \infty$, on trouve $a_1 + \alpha = 0$, d'où $\alpha = 0$.
Ensuite, en faisant $x = 0$, on trouve $1 = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 + \beta$ d'où $\beta = -\dfrac{1}{4}$.
Finalement:

$$F = \frac{1/4}{(X-1)^2} + \frac{-1/2}{(X-1)^3} + \frac{1/2}{(X-1)^4} + \frac{-1/4}{X^2+1}$$

$\boxed{Q\ 2}$ La décomposition s'écrit

$$F(X) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X-\omega_k} \quad \omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$

On utilise la formule $\lambda_k = \dfrac{P(\omega_k)}{Q'(\omega_k)} = \dfrac{\omega_k^{n-1}}{n\omega_k^{n-1}} = \dfrac{1}{n}$ et donc

$$F(X) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{X-\omega_k}$$

$\boxed{Q\ 3}$ Puisque $\dfrac{1}{X(X+1)} = \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{X+1}$, il vient que

$$\frac{1}{X^3(X^3+1)} = \frac{1}{X^3} - \frac{1}{X^3+1}$$

et il ne reste qu'à décomposer

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{(X+1)(X^2-X+1)} = \frac{\frac{1}{3}}{X+1} - \frac{1}{3}\frac{X-2}{X^2-X+1}$$

$\boxed{Q\ 4}$ En multipliant la décomposition par $(X-a)^2$, on obtient

$$G = \beta + \alpha(X-a) + (X-a)^2\frac{U_1}{V_1}$$

On trouve donc que $\beta = G(a)$, puis en dérivant, que $\alpha = G'(a)$.
La généralisation est immédiate. Si la fraction F possède un pôle d'ordre k,

$$F = \frac{U}{(X-a)^k V_1} = \frac{\alpha_1}{X-a} + \frac{\alpha_2}{(X-a)^2} + \dots + \frac{\alpha_k}{(X-a)^k} + \frac{U_1}{V_1}$$

en multipliant par $(X-a)^k$, on trouve

$$G=(X-a)^kF=\frac{U}{V_1}=\alpha_k+\alpha_{k-1}(X-a)+\dots+\alpha_1(X-a)^k+\frac{U_1}{V_1}$$

d'où l'on tire en dérivant k fois, que

$$\begin{cases}\alpha_k & =G(a)\\ \alpha_{k-1} & =G'(a)\\ \alpha_{k-2} & =\dfrac{G''(a)}{2}\\ \vdots & =\vdots\\ \alpha_1 & =\dfrac{G^{(k)}(a)}{k!}\end{cases}$$

$\boxed{Q\ 5}$ On a $V(X)=(X-a)^2Q(X)$ avec $Q(a)\neq 0$. Donc

$$F(X)=\frac{U(X)}{(X-a)^2Q(X)}=\frac{\lambda}{X-a}+\frac{\mu}{(X-a)^2}+\frac{P(X)}{Q(X)}$$

En multipliant par $(X-a)^2$ et en faisant $x=a$, on trouve que $\mu=\dfrac{U(a)}{Q(a)}$. Il s'agit de trouver $Q(a)$ en fonction de V. Par Taylor:

$$V(X)=V(a)+(X-a)V'(a)+(X-a)^2\left[\frac{V''(a)}{2}+(X-a)T(X)\right]$$

Donc $Q(a)=\dfrac{V''(a)}{2}$. Alors

$$\boxed{\mu=\frac{2U(a)}{V''(a)}}$$

En retranchant,

$$\frac{U(X)-\mu Q(X)}{(X-a)^2Q(X)}=\frac{\lambda}{X-a}+\frac{P(X)}{Q(X)}$$

Si l'on note $H(X)=U(X)-\mu Q(X)$, alors $H(a)=0$. Donc H est divisible par $(X-a)$:

$$H(X)=(X-a)\theta(X)$$

En multipliant alors par $(X-a)$ et en faisant $x=a$, on trouve

$$\lambda=\frac{\theta(a)}{Q(a)}$$

En utilisant encore Taylor, $\theta(a)=H'(a)=U'(a)-\mu Q'(a)$. Mais puisque

$$Q(X)=\frac{V''(a)}{2}+(X-a)\frac{V'''(a)}{6}+(X-a)^3Z(X)$$

$$Q'(a)=\frac{V'''(a)}{6}$$

Finalement,

$$\boxed{\lambda=\frac{6U'(a)V''(a)-2U(a)V'''(a)}{3(V''(a))^2}}$$

$\boxed{Q\ 6}$ Regarder pour un polynôme de degré 2, puis utiliser formellement la dérivée logarithmique . Enfin décomposer la fraction $\dfrac{P'(X)}{P(X)}$. On trouve $S_1=\dfrac{P'(a)}{P(a)}$ puis en dérivant, $S_2=\dfrac{(PP')'-2P'^2}{P^2}(a)$.

$\boxed{Q\ 7}$ La décomposition s'écrit :

$$\frac{n!}{X(X+1)\dots(X+n)}=\sum_{p=0}^{n}\frac{\lambda_p}{X+p}$$

En multipliant par $(X+p)$ et en faisant $x=-p$, on en déduit le coefficient λ_p :

$$\lambda_p = \frac{n!}{(-p)(-p-1)\dots(-1)(1)(2)\dots(n-p)} = \frac{n!}{(-1)^p p!(n-p)!} = (-1)^p \binom{n}{p}$$

Finalement :

$$F(X) = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p \binom{n}{p}}{X+p}$$

En faisant passer l'élément simple $\dfrac{\lambda_0}{X}$ dans le membre gauche, on obtient :

$$\frac{1}{X}\left[\frac{n!}{(X+1)\dots(X+n)} - 1\right] = \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^p \binom{n}{p}}{X+p}$$

Notons ϕ la fonction rationnelle

$$\phi(x) = \frac{n!}{(x+1)\dots(x+n)}$$

On reconnaît alors un taux d'accroissement :

$$\frac{\phi(x)-\phi(0)}{x} = \sum_{p=1}^{n} (-1)^p \frac{\binom{n}{p}}{x+p}$$

L'idée consiste à prendre la limite lorsque $x \to 0$. Cherchons donc $\phi'(0)$. Comme $\phi(0)=1>0$, et que ϕ est continue en 0, il existe un voisinage de 0, $V =]-\alpha,\alpha[$ $(\alpha > 0)$ sur lequel ϕ est strictement positive. Nous pouvons donc considérer $\psi(x) = \ln\big(\phi(x)\big)$ sur ce voisinage V. Alors $\forall x \in V$,

$$\psi(x) = \ln(n!) - \sum_{p=1}^{n} \ln(x+p)$$

en dérivant :

$$\psi'(x) = \frac{\phi'(x)}{\phi(x)} = -\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{x+p}$$

et en prenant la limite lorsque $x \to 0$, puisque $\phi(0)=1$, on trouve que

$$\phi'(0) = -\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p \binom{n}{p}}{p}$$

$\boxed{Q\ 8}$ Soit $n \geq 1$, en intégrant par parties (dériver x^n), on trouve que

$$I_n = \frac{2n}{3}\int_0^1 x^{n-1}(1-x)^{3/2}dx = \frac{2n}{3}(I_{n-1} - I_n)$$

d'où la relation de récurrence :

$$I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1} = \dots = \frac{(2n)(2n-2)\dots 2}{(2n+3)(2n+1)\dots 5} I_0$$

et puisque $I_0 = \dfrac{2}{3}$, on obtient finalement

$$\boxed{I_n = \frac{2^{2n+2} n!(n+1)!}{(2n+3)!}}$$

$\boxed{Q\ 9}$ On décompose la fraction rationnelle : $X^3+1 = (X+1)(X^2-X+1)$ (utiliser $\times x$, $x \to +\infty$ et faire $x=0$) :

$$\frac{1}{X^3+1} = \frac{1}{(X+1)(X^2-X+1)} = \frac{\frac{1}{3}}{X+1} + \frac{-\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}}{X^2-X+1}$$

Ensuite on primitive les éléments simples comme en cours,

$$I = \boxed{\frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3}\ln 2}$$

$\boxed{Q\ 10}$ Décomposons la fraction rationnelle en éléments simples :

$$\frac{1}{X(X^2+X+1)} = \frac{1}{X} - \frac{1+X}{X^2+X+1} - \frac{1+X}{(X^2+X+1)^2}$$

On primitive chacun des éléments simples. Pour calculer la dernière primitive, procéder dans l'ordre :

1. Éliminer le x du numérateur : $\int \frac{x+1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2} = -\frac{1}{2(x^2+x+1)} + \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+x+1)^2}$.
2. Par réduction du trinôme et un changement de variables, se ramener à $\int \frac{\mathrm{d}y}{(y^2+1)^2}$
3. On calcule cette dernière primitive en intégrant par partie $\int \frac{\mathrm{d}y}{(y^2+1)}$.

On trouve finalement,

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^2+x+1)^2} = \frac{-x+1}{3(x^2+x+1)} - \frac{5}{3\sqrt{3}}\arctan\Big(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\Big) + \ln\Big(\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\Big)$$

$\boxed{Q\ 11}$ C'est une fraction rationnelle. Après décomposition en éléments simples, on trouve

$$F = x - \frac{\frac{1}{2}}{(x+1)} - \frac{3}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{4}\ln(x^2+1)$$

$\boxed{Q\ 12}$ On reconnaît une somme de Riemann :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) \text{ où } f : \left\{\begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{1+x}\sqrt{\frac{x}{1+x}} \end{array}\right.$$

avec la fonction f qui est continue sur le segment $[0,1]$. Par conséquent, la suite (u_n) converge vers

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\sqrt{\frac{x}{1+x}}$$

C'est une intégrale d'une fraction rationnelle en x et en une racine nième d'une homographie qui se calcule grâce au changement de variables $t = \sqrt{\frac{x}{1+x}}$. On trouve alors :

$$I = \boxed{-\sqrt{2} + \ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$$

$\boxed{Q\ 13}$ C'est une fraction rationnelle en t et en la racine nième d'une homographie. Posons donc $u = \sqrt{\frac{t-1}{t+1}}$:

$$t = \frac{u^2+1}{-u^2+1} \qquad dt = \frac{4u}{(1-u^2)}du$$

Donc

$$I = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{4u^2}{(1-u^2)(1+u^2)}du$$

et en décomposant en éléments simples cette fraction rationnelle,

$$\frac{4u^2}{(1-u^2)(1+u^2)} = \frac{1}{1+u} - \frac{1}{u-1} - \frac{2}{u^2+1}$$

on trouve finalement :

$$I = \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right) - \frac{\pi}{3}$$

$\boxed{Q\ 14}$ La fonction à primitiver est continue sur le l'intervalle $I = [-1-\sqrt{2}, \sqrt{2}-1]$. On cherche une primitive sur cet intervalle. C'est une primitive d'une fraction rationnelle en x et la racine d'un trinôme. On commence par réduire le trinôme sous forme canonique :

$$-x^2 - 2x + 1 = -((x+1)^2 - 2) = 2(1 - \left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2)$$

et après le changement de variables $y = \dfrac{x+1}{\sqrt{2}}$, on se ramène au calcul d'une primitive sur $J = [-1,1]$:

$$G = 4\int y^2\sqrt{1-y^2}dy$$

En posant alors $y = \sin t$, (pour éliminer la racine), on se ramène au calcul d'une primitive sur l'intervalle $J' = [-\pi/2, \pi/2]$:

$$H = 4\int \sin^2 t \cos^2 t dt = \int \sin^2(2t)dt$$

qui se calcule en linéarisant. Remplacer ensuite en fonction de x. Terminer le calcul !
Une autre méthode consiste à écrire (a et b sont les racines du trinôme avec $a < b$) :

$$\sqrt{-x^2-2x+1} = \sqrt{(x-a)(b-x)} = (x-a)\sqrt{\frac{b-x}{x-a}}$$

et à se ramener au calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle en x et en la racine d'une homographie. Poser alors t la racine de l'homographie.

$\boxed{Q\ 15}$ Multiplier par les quantités conjuguées et se ramener au calcul de deux primitives simples.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + \operatorname{argsh} x + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \ln(x+\sqrt{x^2-1})\right)$$

$\boxed{Q\ 16}$ Par le changement de variables $y = \sqrt{x-1}$,

$$I = \ln\frac{3+\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\frac{3-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$