Ex 1 Facile

Déterminer dans le groupe symétrique $\mathfrak{S}_7$, l'ordre de la permutation

$$\sigma = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 1 & 2 & 4 & 5 & 6 \end{smallmatrix}\right)$$

Ex 2 Moyen

a. Montrer qu'une transposition τ_{ij} s'écrit comme un produit de transpositions de la forme τ_{1k}.
b. En déduire que les cycles de longueur 3 engendrent le groupe alterné $\mathcal{A}_n$.

Ex 3 Facile

Calculer les déterminants

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & -1 & & \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & & & -1 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} (x+1) & 1 & \dots & & 1 \\ 2 & (x+2) & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 3 & (x+3) & \ddots & 3 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ n & & \dots & & (x+n) \end{vmatrix}$$

Ex 4 Facile

Calculer le déterminant de la matrice $A = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ où $a_{ii} = 1, a_{1,i} = 1, a_{i1} = 1$ et 0 sinon.

Ex 5 Cours

Calculer le déterminant tridiagonal

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \dots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & x & 1+x^2 & x \\ 0 & \dots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix}$$

Ex 6 Facile

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique avec n impair. Montrer qu'elle n'est pas inversible.

Ex 7 Facile

On considère une matrice $A = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i+j > n+1 \Rightarrow a_{ij} = 0$$

Calculer $\det(A)$. Si on suppose de plus que $a_{ij} > 0$ lorsque $i+j \leq n+1$, déterminer le signe de $\det(A)$.

Ex 8 Facile

On considère une matrice $A = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et on définit la matrice $A' = ((\ (-1)^{i+j} a_{ij}))$. Exprimer $\det(A')$ en fonction de $\det(A)$.

Ex 9 Moyen

Calculer les déterminants suivants en utilisant un déterminant de Vandermonde :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ bcd & acd & abd & abc \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^4 \end{vmatrix}$$

Indication : Pour le deuxième, introduire

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 \\ 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \end{vmatrix}$$

Ex 10 `Moyen`

Soient $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathfrak{M}_{pn}(\mathbb{R})$ avec $n > p$. Montrer que $\det(AB) = 0$.

Ex 11 `Difficile`

Soit $f : \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}$ une fonction vérifiant $f \neq 0$ $f(0) = 0$ et

$$\forall (A,B) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \quad f(AB) = f(A) \times f(B)$$

Montrer que pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,

$$f(A) = 0 \Longleftrightarrow \det(A) = 0$$

On pourra utiliser les matrices équivalentes.

Corrigé des exercices

$\boxed{Q\ 1}$ Décomposons σ en produit de cycles à supports disjoints qui commutent :

$$\sigma = (1{,}3) \circ (2{,}7{,}6{,}5{,}4) = c_1 \circ c_2$$

L'ordre de σ est le plus petit entier $k \in \mathbb{N}^\star$ tel que $\sigma^k = \mathrm{id}$. Mais $\sigma^k = c_1^k \circ c_2^k$, et donc

$$\sigma^k = \mathrm{id} \iff c_1^k = \mathrm{id} \text{ et } c_2^k = \mathrm{id} \iff 2/k \text{ et } 5/k$$

L'ordre de σ est donc $\mathrm{ppcm}(2{,}5) = 10$.

$\boxed{Q\ 2}$ On vérifie que $\tau_{1i} \circ \tau_{1j} \circ \tau_{1i} = \tau_{ij}$ lorsque $1{,}i{,}j$ sont distincts. On sait que les transpositions engendrent le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Puisque toute transposition s'écrit comme un produit de transpositions τ_{1i}, les $(n-1)$ transpositions τ_{1i} engendrent également $\mathfrak{S}_n$. Montrons que toute permutation paire s'exprime comme produit de 3-cycles. Soit $\sigma \in \mathcal{A}_n$ une permutation paire. Elle s'écrit comme produit de transpositions τ_{1i}. En prenant la signature, on voit qu'il y a un nombre pair de telles transpositions dans la décomposition. Si l'on calcule le produit de deux telles transpositions, on trouve un 3-cycle :

$$\tau_{1i} \circ \tau_{1j} = (1,\, j,\, i)$$

Par conséquent, notre permutation paire σ s'écrit comme produit de tels 3-cycles.

$\boxed{Q\ 3}$ Pour Δ_1, ajouter toutes les colonnes à la première :

$$C_1 \leftarrow C_1 + \dots + C_n$$

On trouve alors un déterminant triangulaire : $\Delta_1 = (-1)^{n-1}(n-1)$.
Pour Δ_2, retrancher la première colonne à toutes les autres :

$$C_2 \leftarrow C_2 - C_1, \quad \dots \quad C_n \leftarrow C_n - C_1$$

On remarque ensuite que dans les $n-1$ dernières colonnes, la somme de tous les éléments vaut 0. Ajouter donc toutes les lignes à la première. On se ramène à un déterminant triangulaire : $\Delta_2 = x^{n-1}\left(x + \dfrac{n(n+1)}{2}\right)$.

$\boxed{Q\ 4}$ Faire $C_1 \leftarrow C_1 - C_2 - \dots - C_n$. On trouve une matrice triangulaire supérieure et le déterminant vaut $(1-n)$ pour $n \geq 3$. Il est nul si $n = 2$.

$\boxed{Q\ 5}$ Adopter la méthode classique pour les déterminants tridiagonaux : développer par rapport à la dernière colonne, puis développer le deuxième déterminant par rapport à la dernière ligne. On trouve la relation de récurrence

$$\forall n \geq 2, \quad \Delta_n - (1+x^2)\Delta_{n-1} + x^2\Delta_{n-2} = 0$$

avec $\Delta_1 = (1+x^2)$ et $\Delta_2 = (1+x^2)^2 - x^2$, et la relation de récurrence est vérifiée en posant artificiellement $\Delta_0 = 1$. l'équation caractéristique est $(r-1)(r-x^2) = 0$. On distingue donc deux cas :

1. Si $x = 1$, 1 est racine double de l'équation caractéristique, donc $\exists \lambda{,}\mu \in \mathbb{R}^2$ tq $\forall n \in \mathbb{N}{,}\Delta_n = \lambda + \mu n$. En utilisant les conditions initiales Δ_0, Δ_1, on trouve que $\boxed{\Delta_n = 1 + n}$.
2. Si $x \neq 1$, $\exists \lambda{,}\mu \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\Delta_n = \lambda + \mu x^{2n}$. Avec les conditions initiales, on trouve que $\boxed{\Delta_n = \dfrac{1}{x^2-1}\left(-1 + x^{2n+2}\right) = 1 + x^2 + \dots + x^{2n}}$.

$\boxed{Q\ 6}$ Calculons

$$\det(A) = \det({}^tA) = \det(-A) = (-1)^n \det(A) = -\det(A) \Rightarrow \det(A) = 0$$

$\boxed{Q\ 7}$ Dessiner une telle matrice. Tous ses coefficients sont nuls en dessous de la diagonale joignant a_{n1} à a_{1n}. Étudier deux cas :

1. n pair : $n = 2p$. En effectuant les échanges de colonnes $C_1 \leftrightarrow C_n$, $\dots$, $C_p \leftrightarrow C_{p+1}$, on trouve une matrice triangulaire supérieure et le déterminant vaut

$$(-1)^p a_{1,n} a_{2,n-1} \dots a_{n,1}$$

2. n impair : $n = 2p+1$. En effectuant les échanges de colonnes $C_1 \leftrightarrow C_n$, $\dots$, $C_p \leftrightarrow C_{p+2}$ on trouve également que $\det(A) = (-1)^p a_{1,n} \dots a_{n,1}$.

Le signe de $\det(A)$ dépend de n modulo 4 (parité de p).

$\boxed{Q\ 8}$ En utilisant la formule du déterminant,

$$\det(A') = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)(-1)^{1+\sigma(1)} \dots (-1)^{n+\sigma(n)} a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)}$$

Mais $(-1)^{1+\sigma(1)} \dots (-1)^{n+\sigma(n)} = (-1)^{n(n+1)} = 1$ et donc $\det(A') = \det(A)$.

$\boxed{Q\ 9}$ Supposons dans un premier temps que $abcd \neq 0$. Alors

$$\Delta_1 = \frac{1}{abcd} \det(aC_1,bC_2,cC_3,dC_4) = \frac{1}{abcd} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \\ abcd & abcd & abcd & abcd \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

c'est un Vandermonde et $\Delta_1 = -(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a)$.
Si on suppose que $abcd = 0$, considérons $f(\varepsilon) = \Delta_1(a+\varepsilon,b+\varepsilon,c+\varepsilon,d+\varepsilon)$ avec $\varepsilon \neq 0$. On utilise la formule précédente qui est une fonction continue en ε. Lorsque $\varepsilon \to 0$, on retrouve l'expression de Δ_1. *C'est une astuce classique à retenir.*
On calcule le Vandermonde

$$P(x) = V(x,a,b,c,d) = (d-x)(d-a)(d-b)(d-c)\dots(a-x)$$

et en développant $P(x)$ par rapport à la première ligne, on s'aperçoit que Δ_2 est le coefficient en x^3 de $P(x)$. On obtient donc $\boxed{\Delta_2 = -(a+b+c+d)(d-a)(d-b)(d-c)(c-a)(c-b)(b-a)}$.

$\boxed{Q\ 10}$ Soit considérer les applications linéaires associées et le théorème du rang, soit travailler par blocs :

$$\begin{vmatrix} A & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B \\ 0 \end{vmatrix} = AB$$

$\boxed{Q\ 11}$ Soit une telle fonction f. Puisque $I_n = I_n^2$, $f(I_n) = f(I_n)^2$. et donc $f(I_n) = 0$ ou bien $f(I_n) = 1$. Si l'on avait $f(I_n) = 0$, alors pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, on aurait $f(A) = f(AI_n) = f(A) \times 0 = 0$, et donc f serait la fonction nulle ce qui est exclu par l'énoncé. Donc $f(I_n) = 1$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Par l'absurde, si $\det(A) \neq 0$, alors la matrice A est inversible et puisque $A \times A^{-1} = I_n$, en appliquant f, on trouve que $f(A) \times f(A^{-1}) = f(I_n) = 1$ ce qui montre que $f(A) \neq 0$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Puisque $\det(A) = 0$, en notant $k = \operatorname{rg}(A)$, on a $k < n$. En utilisant la caractérisation des matrices de rang r, pour toute matrice B de rang r, il existe deux matrices inversibles $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PBQ$. En notant A_i $(1 \leq i \leq n)$ une matrice avec r 1 sur la diagonale principale, et avec $a_{ii} = 0$, on a $\operatorname{rg}(A_i) = r$ et il existe donc deux matrices inversibles P_i et G_i telles que $A = P_i A_i Q_i$. Donc

$$A^n = P_1 A_1 Q_1 P_2 A_2 Q_2 \dots P_n A_n Q_n$$

et en appliquant f,

$$f(A)^n = f(P_1)\dots f(P_n) f(Q_1) \dots f(Q_n) f(A_1 \dots A_n)$$

Mais la matrice $A_1 \dots A_n$ est nulle et donc $f(A_1 \dots A_n) = 0$. Par conséquent, $f(A)^n = 0$ et donc $f(A) = 0$.