Ex 1

Trouver le DL(0,2) de la fonction définie par

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{3/x^2}$$

Ex 2

Déterminer le DL(0,4) de la fonction définie par :

$$(\cos x)^{1+\sin x}$$

Ex 3

Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$$

Ex 4

Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right)$$

Ex 5

Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\operatorname{ch} \frac{1}{x}\right)^{x^2}$$

Ex 6

Trouver la limite lorsque $x \to 0$ de la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\sin(x - \sin x)}{\sqrt{1+x^3}-1}$$

Ex 7

Faire l'étude locale en 0 de la fonction définie par :

$$f(x) = \left(\frac{2}{\sin^2 x} + \frac{1}{\ln(\cos x)}\right)$$

Ex 8

Etudier le prolongement en 0 de la fonction définie par

$$f(x) = \frac{1-\cos x}{\tan^2 x}$$

Ex 9

Considérons la fonction définie par l'intégrale

$$f(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$$

a. Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$;

b. Déterminer le $DL(0,10)$ de la fonction f ;

c. Déterminer un développement asymptotique de la fonction f au voisinage de $+\infty$ à la précision $1/x^{10}$.

Ex 10

Construire les courbes représentatives des deux fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{\ln x}$$

$$g(x) = \left(\frac{e^x+1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

On précisera les asymptotes éventuelles, la position de la courbe par rapport aux asymptotes, et on étudiera éventuellement les prolongements par continuité.

Ex 11

Étudier la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = \tan t + \sin t \\ y(t) = \dfrac{1}{\cos t} \end{cases}$$

Ex 12

Étudier la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2+1}{2t} \\ y(t) = \dfrac{2t-1}{t^2} \end{cases}$$

(On montrera l'existence d'une parabole asymptote).

Ex 13

Construire la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{t^2-1} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t-1} \end{cases}$$

Déterminer ensuite les coordonnées du point double I et montrer que les tangentes en I sont orthogonales.

Corrigé des exercices

$\boxed{Q\ 1}$ Ecrivons la fonction sous forme exponentielle et utilisons les DL classiques :

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{3/x^2} = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{60\sqrt{e}}x^2 + o(x^2)$$

$\boxed{Q\ 2}$ On trouve $1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$.

$\boxed{Q\ 3}$ En utilisant un $DL(0,3)$ de e^x, on trouve un $DL(0,3)$ du numérateur :

$$N(x) = \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) \Rightarrow N(x) \sim \frac{x^3}{6}$$

Donc la limite cherchée vaut $\boxed{1/6}$.

$\boxed{Q\ 4}$ On réduit au même dénominateur et on cherche un équivalent du numérateur et du dénominateur :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x\ln(1+x)}$$

Utilisons le $DL(0,2)$ de $\ln(1+x)$: $\ln(1+x) - x \sim \frac{-x^2}{2}$ et l'équivalent classique $x\ln(1+x) \sim x^2$. On obtient alors $f(x) \sim -\frac{1}{2}$. Par conséquent, la limite cherchée vaut $\boxed{1/2}$.

$\boxed{Q\ 5}$ Par le changement de variables $h = \frac{1}{x}$, on se ramène à la limite lorsque $h \to 0$ de la fonction définie par

$$g(h) = (\operatorname{ch} h)^{1/h^2} = e^{1/h^2 \ln(\operatorname{ch} h)}$$

Mais

$$\ln(\operatorname{ch} h) = \ln(1 + \frac{h^2}{2} + o(h^2)) = \frac{h^2}{2} + o(h^2)$$

et donc $\frac{1}{h^2}\ln(\operatorname{ch} h) \sim \frac{1}{2}$ et par conséquent $g(h) \to e^{1/2}$. La limite cherchée vaut donc $\boxed{\sqrt{e}}$.

$\boxed{Q\ 6}$ Cherchons un équivalent du dénominateur :

$$\sqrt{1+x^3} - 1 = \frac{x^3}{2} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{2}$$

Cherchons un équivalent du numérateur, en faisant un $DL(0,3)$:

$$\sin(x - \sin x) = \sin\left(x - (x - \frac{x^3}{6} + o(x^3))\right) = \sin(\frac{x^3}{6} + o(x^3)) = \frac{x^3}{6} + o(x^3) \sim \frac{x^3}{6}$$

(on a fait une composée de DL car $x - \sin x \to 0$). Alors $f(x) \sim \frac{1}{3}$ et donc la limite vaut $\boxed{\frac{1}{3}}$.

$\boxed{Q\ 7}$ En effectuant un $DL(0,n)$ de sin, on trouvera :

$$\frac{2}{\sin^2 x} = \frac{1}{x^2(\cdots + o(x^{n-1}))^2}$$

et de même avec un $DL(0,p)$ de $\cos x$, on trouvera :

$$\frac{1}{\ln(\cos x)} = \frac{1}{x^2(\cdots + o(x^{p-2}))}$$

et finalement, on aura à la fin :

$$f(x) = \cdots + o(x^{n-3}) + o(x^{p-4})$$

Pour faire l'étude locale complète en 0, il nous faut un terme significatif qui tend vers 0, et donc $n - 3 \geq 2$, donc $n \geq 5$ et $p - 4 \geq 2$, c'est à dire $p \geq 6$. Faisons donc nos développements limités à l'ordre 5 et 6. On trouve après calculs que

$$f(x) = 1 + \frac{1}{6}x^2 + o(x^2)$$

Donc f se prolonge en une fonction $\widetilde{f}$ dérivable en 0, avec $\widetilde{f}(0) = 1$, $\widetilde{f}'(0) = 0$ et localement la courbe représentative de $\widetilde{f}$ est située au dessus de sa tangente en 0 d'équation $y = 1$.

$\boxed{Q\ 8}$ Effectuons un $DL(0,2)$ de $f(x)$:

$$f(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)$$

Donc $f(x)$ se prolonge par continuité en 0 en une fonction $\widetilde{f}$ dérivable en 0, avec $\widetilde{f}(0) = \frac{1}{2}$, $\widetilde{f}'(0) = 0$. Localement, la courbe est située en dessous de sa tangente en 0.

$\boxed{Q\ 9}$ En utilisant le théorème fondamental, on montre que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x^8}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

La fonction f' est de classe $\mathcal{C}^9$ sur $\mathbb{R}$ et en primitivant le $DL(0,9)$ de f', on obtient le $DL(0,10)$ de f :

$$f(x) = -x + x^2 + \frac{x^5}{10} + \frac{x^9}{24} - \frac{x^{10}}{10} + o(x^{10})$$

Posons ensuite $X = \frac{1}{x}$. En effectuant le changement de variables $u = \frac{1}{t}$, on trouve qu'au voisinage de $+\infty$,

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{10x^5} - \frac{1}{24x^9} + \frac{1}{10x^{10}} + o(x^{-10})$$

$\boxed{Q\ 10}$ $D_f =]0,1[\cup]1,+\infty[$ et $f'(x) = \dfrac{x\ln x - (x+1)\ln(x+1)}{x(x+1)\ln^2 x} \leq 0$ (car $x\ln x \leq (x+1)\ln(x+1)$). Donc la fonction f est décroissante. $f(x) \sim \dfrac{x}{\ln x}$ lorsque $x \to 0$ et donc $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Puisque $\dfrac{f(x)}{x} \sim \dfrac{1}{\ln x} \to -\infty$, la courbe présente une tangente verticale en 0. Lorsque $x \to +\infty$, $f(x) = \dfrac{\ln x(1+\frac{1}{x})}{\ln x} = 1 + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln x}$ et donc $f(x) - 1 \sim \dfrac{1}{x\ln x} \to 0$.
La droite $y = 1$ est une asymptote, et la position par rapport à l'asymptote se lit sur le tableau de variations.
$D_g = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. $g(x) = \exp\left[\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x+1}{2}\right)\right]$.

$$g'(x) = \frac{\left(\frac{e^x+1}{2}\right)^{\frac{1}{x}}}{x^2}\left[2x\frac{e^x}{e^x+1} - \ln(\frac{e^x+1}{2})\right]$$

Etudions le signe de $\phi(x) = 2x\dfrac{e^x}{e^x+1} - \ln(\dfrac{e^x+1}{2})$. $\phi'(x) = \dfrac{2xe^x}{(e^x+1)^2}$ est du signe de x. Comme $\phi(0) = 0$, il vient que $g'(x) \geq 0$.
Lorsque $x \to 0$, posons

$$a(x) = \frac{1}{x}\ln(\frac{e^x+1}{2}) = \frac{1}{x}\ln(1 + \frac{e^x-1}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}x - \frac{1}{192}x^3 + o(x^3)$$

On a alors

$$\boxed{g(x) = \sqrt{e} + \frac{\sqrt{e}}{8}x + \frac{\sqrt{e}}{128}x^2 + o(x^2)}$$

Donc g se prolonge par continuité en 0 en posant $g(0) = \sqrt{e}$. La fonction ainsi prolongée est dérivable en 0, de dérivée $g'(0) = \dfrac{\sqrt{e}}{8}$ et localement, la courbe se situe au dessus de sa tangente.
Lorsque $x \to +\infty$, posons $h = \dfrac{1}{x}$,

$$\widetilde{g}(h) = \exp\left(h\ln\left[\frac{e^{\frac{1}{h}}+1}{2}\right]\right) = \exp\left(1 + h\ln\left[\frac{1+e^{-\frac{1}{h}}}{2}\right]\right)$$

Lorsque $h \to 0^-$, $e^{\frac{1}{h}} \to 0$, et donc $\widetilde{g}(h) \to 1$. Lorsque $h \to 0^+$, on utilise la deuxième expression : $e^{-\frac{1}{h}} \to 0$ et donc $\widetilde{g}(h) \to e$. On trouve donc que lorsque $x \to -\infty$, $g(x) \to 1$ et lorsque $x \to +\infty$, $g(x) \to e$. La position par rapport aux asymptotes se lit sur le tableau de variations.

$\boxed{Q\ 11}$

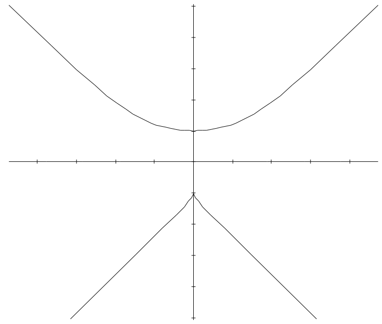

FIG. 1 – *Exercice 11*

1. Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2; k \in \mathbb{Z}\}$.
2. **Restriction de l'intervalle d'étude**. On remarque que $x(t + 2\pi) = x(t)$ et $y(t + 2\pi) = y(t)$. Donc $M(t+2\pi) = M(t)$. Il suffit de faire l'étude de la courbe sur un intervalle $[\alpha,\alpha+2\pi]$. De plus, $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$. Le point $M(-t)$ est donc le symétrique du point $M(t)$ par rapport à l'axe Oy. Il suffit donc de faire l'étude sur $[0,\pi]$ et de compléter le tracé de la courbe par une symétrie par rapport à la droite Oy.
3. **Variations**. On calcule
$$x'(t) = \frac{\cos^3 t + 1}{\cos^2 t} \quad y'(t) = \frac{\sin t}{\cos^2 t}$$
On remarque un point stationnaire $M(\pi)$ et une branche infinie en $t = \pi/2$. Les fonctions sont croissantes sur chacun des intervalles $[0,\pi/2[$ et $]\pi/2,\pi]$.
4. **Étude du point stationnaire**. Posons $h = t - \pi$, et faisons un $DL(0,3)$:
$$\widetilde{x}(h) = \frac{h^3}{2} + o(h^3), \quad \widetilde{y}(h) = -1 - \frac{h^2}{2} + o(h^3)$$
d'où l'on tire
$$F(h) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{h^2}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{h^3}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + o(h^3)$$
Dans le repère $\mathcal{R} = (M(\pi),\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ où $\overrightarrow{u} = (0,-1)$ et $v = (1,0)$, le point $M(t)$ a pour coordonnées $\big(X(t),Y(t)\big)$ avec $X(t) \sim (t-\pi)^2/2$ et $Y(t) \sim (t-\pi)^3/2$ lorsque $t \to \pi$. On en déduit que le point $M(\pi)$ est un point de rebroussement de première espèce à tangente verticale.
5. **Étude de la branche infinie**. Lorsque $t \to \pi/2$, en posant $h = t - \pi/2$, on effectue un développement asymptotique des deux fonctions :
$$\widetilde{x}(h) = x(\pi/2 + h) = -\frac{1}{\tan h} + \cos(h) = -\frac{1}{h(1 + h^2/3 + o(h^2))} + 1 + o(h) = -\frac{1}{h} + 1 + \frac{h}{3} + o(h)$$
$$\widetilde{y}(h) = -1/\sin h = -\frac{1}{h} - \frac{h}{6} + o(h)$$
Et alors
$$\widetilde{y}(h) - \widetilde{x}(h) + 1 = -h/2 + o(h)$$
ce qui montre que $y(t) - x(t) + 1 \sim -(t - \pi/2)/2$ lorsque $t \to \pi/2$. Par conséquent, la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe. Lorsque $t \to \pi/2^+$, la courbe arrive sous l'asymptote à gauche, et lorsque $t \to \pi/2^-$, la courbe arrive sur l'asymptote à droite.

$\boxed{Q\ 12}$

1. **Domaine de définition :** $D_x = D_y = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. **Restriction de l'intervalle d'étude :** Rien d'apparent.
3. **Variations :** On calcule
$$x'(t) = \frac{(t-1)(t+1)}{2t^2} \quad y'(t) = \frac{-2(t-1)}{t^3}$$
En traçant le tableau de variations, on trouve un point stationnaire $M(1)$, et une branche infinie lorsque $t \to 0$.

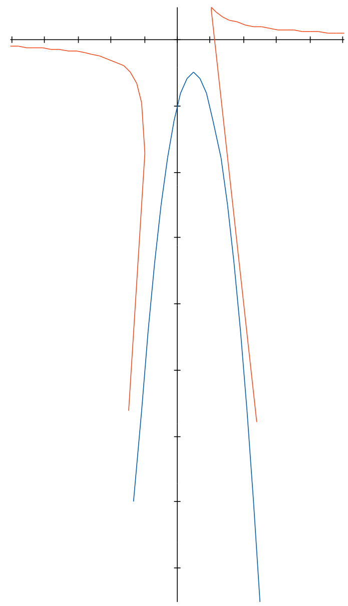

FIG. 2 – *Exercice 12*

4. **Étude du point stationnaire :** en posant $h = x - 1$, on trouve

$$\widetilde{F}(h) = F(1+h) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{h^2}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{h^3}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + o(h^3)$$

et donc le point stationnaire est un point de rebroussement de première espèce, de tangente dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u} = (1, -2)$.
5. **Étude des branches infinies :** Lorsque $t \to \pm\infty$, comme $y(t) \to 0$, la droite (Ox) est asymptote, et le tableau de variations donne la position de la courbe par rapport à l'asymptote.
Pour l'étude de la branche infinie en $t = 0$, écrivons

$$x(t) = t/2 + 1/(2t), \quad y(t) = -1/t^2 + 2/t$$

et calculons (pour éliminer les termes en $1/t^2$) :

$$y(t) + 4x^2(t) = 2 + 2/t + t^2$$

Éliminons ensuite les termes divergents en $1/t$ en calculant

$$y(t) + 4x^2(t) - 4x(t) = 2 + 2/t + t^2$$

d'où l'on tire que

$$y(t) + 4x^2(t) - 4x(t) - 2 \sim -2t$$

et donc la parabole d'équation $y = -4x^2 + 4x - 2$ est asymptote à la courbe, et lorsque $t \to 0^+$, la courbe est située localement au dessous de la parabole, et lorsque $t \to 0^-$, elle est située localement au dessus de la parabole.

$\boxed{Q\ 13}$

1. **Domaine de définition :** $D_x = \mathbb{R} \setminus \{-1{,}1\}$ et $D_y = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
2. **Restriction de l'intervalle d'étude :** Pas de restrictions apparentes.
3. **Variations :** On trouve que

$$x'(t) = -\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2}, \quad y'(t) = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}$$

Le tableau de variations montre deux points ordinaires à tangente horizontale : $M(0) = (0{,}0)$ et $M(2) = (2/3{,}4)$. Il n'y a pas de points stationnaires.

4. **Branches infinies :** Lorsque $t \to \pm\infty$, le tableau de variations montre que la droite (Ox) est asymptote, et on lit la position de la courbe par rapport à cette asymptote. De même, lorsque $t \to -1$, la droite d'équation $y = -1/2$ est asymptote au vu du tableau de variations.
   Pour l'étude de la branche infinie, lorque $t \to 1$, en posant $h = (t-1)$:
$$x(h) = \frac{1}{2h} + \frac{1}{4} - \frac{h}{8} + o(h), \quad y(h) = \frac{1}{h} + 2 + h + o(h)$$
   et donc, lorsque $t \to 1$,
$$y(t) - 2x(t) - \frac{3}{2} \sim \frac{5}{4}(t-1)$$
   la droite $y = 2x + 3/2$ est asymptote. Lorsque $t \to 1^{-1}$, la courbe arrive à gauche en dessous, et lorsque $t \to 1^+$, la courbe arrive sur l'asymptote à droite au dessus.
5. **Coordonnées du point double :** Cherchons le point double $M = M(t_1) = M(t_2)$ avec $t_1 \neq t_2$. On doit avoir
$$\begin{cases} t_1(t_2^2-1) & = t_2(t_1^2-1) \\ t_1^2(t_2-1) & = t_2^2(t_1-1) \end{cases}$$
   et en mettant $(t_1 - t_2)$ en facteur,
$$\begin{cases} t_1t_2 + 1 & = 0 \\ t_1t_2 - (t_1+t_2) & = 0 \end{cases}$$
   Par conséquent, $t_1t_2 = -1$ et $t_1 + t_2 = -1$. Les deux valeurs t_1 et t_2 sont racines du trinôme
$$T^2 + T - 1 = 0$$
   Le point double a pour coordonnées
$$x = \frac{t_1}{t_1^2-1} = \frac{t_2}{t_2^2-1} = \frac{t_1-t_2}{t_1^2-t_2^2} = \frac{1}{t_1+t_2} = -1$$
   et de même, $y = -1$. $I = (-1, -1)$.
6. **Tangentes orthogonales au point double :** Les deux tangentes au point doubles sont dirigées par les vecteurs $\overrightarrow{F'}(t_1)$ et $\overrightarrow{F'}(t_2)$. Il suffit de montrer que ces deux vecteurs sont orthogonaux. Calculons leur produit scalaire :
$$s = \left(\overrightarrow{F'}(t_1) \mid \overrightarrow{F'}(t_2)\right) = x'(t_1)x'(t_2) + y'(t_1)y'(t_2)$$
   On calcule
$$s = \frac{(t_1^2+1)(t_2^2+1)}{(t_1^2-1)^2(t_2^2-1)^2} + \frac{t_1t_2(t_1-2)(t_2-2)}{(t_1-1)^2(t_2-1)^2} = \frac{(t_1t_2)^2 + (t_1^2+t_2^2) + 1}{\left[(t_1t_2)^2 - (t_1^2+t_2^2) + 1\right]^2} + \frac{t_1t_2\left[t_1t_2 - 2(t_1+t_2) + 4\right]}{\left[t_1t_2 - (t_1+t_2) + 1\right]^2}$$
   Mais $t_1^2 + t_2^2 = (t_1+t_2)^2 - 2t_1t_2 = 3$, et finalement
$$s = \frac{1+3+1}{(1-3+1)^2} - \frac{-1+2+4}{(-1+1+1)^2} = 5 - 5 = 0$$
   Ce qui montre que les deux tangentes sont orthogonales.

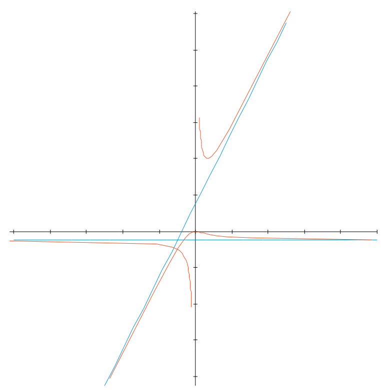

FIG. 3 – *Exercice 13*