Ex 1 `Facile`

Soit deux matrices $A \in GL_n(K)$ et $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que AB et BA sont semblables.

Ex 2 `Facile`

On note $E_n = \mathbb{K}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n. On définit l'endormorphisme de E suivant :

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ P & \mapsto & P' + P \end{array} \right.$$

Écrire la matrice de ϕ dans la base canonique de E. En déduire que les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sont semblables.

Ex 3 `Moyen, instructif`

On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \nearrow & \\ 1 & & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que la matrice P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.
b) Pour une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, calculer la matrice PAP.
c) En déduire qu'une matrice triangulaire inférieure est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Ex 4 `Moyen`

A quelle condition deux matrices E_{pq} et E_{kl} de la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ sont-elles semblables ?

Ex 5 `À faire, instructif`

Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = I$ et telle que A n'est pas une matrice scalaire. Montrer que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ex 6 `ENSI`

On considère un $\mathbb{C}$-e.v. E de dimension 3 et f un endomorphisme non nul de E. Montrez que $f^2 = 0$ si et seulement s'il existe une base e de E telle que

$$\mathrm{Mat}_e(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ex 7 `Moyen`

Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et un endomorphisme $f \in L(E)$ de rang 1.

a. Si l'on suppose que $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0_E\}$, montrer qu'il existe une base ε de E et un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que

$$\mathrm{Mat}_\varepsilon(f) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

b. En déduire que pour tout endomorphisme f de rang 1, il existe un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $f^2 = \alpha f$.

c. Soit une base e quelconque de E, et un endomorphisme $f \in L(E)$ quelconque. On note $B = \mathrm{Mat}_e(f)$ la matrice de l'endomorphisme f dans la base e. Montrer l'équivalence

$$\underbrace{\big(\mathrm{rg}(f) = 1\big)}_{(i)} \iff \underbrace{\big(\exists (X,Y) \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})^2 \text{ non nuls tels que } B = X\,{}^tY\big)}_{(ii)}$$

(On se contentera de la démonstration dans le cas où $\mathrm{Ker}\, f \cap \mathrm{Im}\, f = \{0_E\}$).

Corrigé des exercices

$\boxed{Q\ 1}$ Si A est inversible, il suffit d'écrire

$$AB = A(BA)A^{-1}$$

$\boxed{Q\ 2}$ Dans la base canonique, la matrice de ϕ est A puisque $\phi(1) = 1$ et $\forall k \geq 1$, $\phi(X^k) = kX^{k-1} + X^k$. En considérant la base de Taylor, $t = \left(1, X, \dfrac{X^2}{2!}, \dots, \dfrac{X^n}{n!}\right)$, la matrice de ϕ dans cette base est B. Les deux matrices A et B représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes, elles sont semblables.

$\boxed{Q\ 3}$ a) Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $e = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique. Alors $\exists! u \in L(E)$ tq $Mat_e(u) = P$. On a $\forall i \in [1,n]$, $u(e_i) = e_{n-i+1}$ et $u^2(e_i) = e_i$ et donc $P^2 = I$. Par conséquent, $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et $P^{-1} = P$.
b) Puisque $P = \sum_{k=1}^{n} E_{k,n-k+1}$,

$$PAP = \sum_{1 \leq i,j,k,l \leq n} a_{ij} E_{k,n-k+1} E_{ij} E_{n-l+1,l} = \sum_{i,j,k,l} \delta_{n+1-k,i} \delta_{j,n+1-l} E_{k,l} = \sum_{k,l} a_{n+1-k,n+1-l} E_{kl}$$

La matrice PAP s'obtient en faisant deux symétries de A par rapport aux deux diagonales.

c) Puisque $P^{-1} = P$, PAP^{-1} est une matrice triangulaire supérieure lorsque A est une matrice triangulaire inférieure.

$\boxed{Q\ 4}$ Considérons l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}^n$ muni de sa base canonique.

a. Une condition nécessaire est que les matrices aient même trace. Donc si $p = q$ et $k \neq l$, (ou bien $p \neq q$ et $k = l$), les deux matrices ne sont pas semblables.
b. Montrons que deux matrices E_{pp} et E_{qq} ($p \neq q$) sont semblables. Soit u l'unique endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}_e(u) = E_{pp}$. Considérons la base e' obtenue en permutant les deux vecteurs e_p et e_q. Dans la base e', la matrice de u est E_{qq}. Par conséquent, les deux matrices E_{pp} et E_{qq} représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes : elles sont semblables. Complément : écrivez la matrice de passage de la base e vers la base e', et son inverse.
c. Soient quatre indices $(p,q) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $p \neq q$ et $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $k \neq l$. Notons u l'unique endomorphisme ayant pour matrice E_{pq} dans la base e. Considérons la base e' obtenue en échangeant les vecteurs $e_q \leftrightarrow e_l$ et $e_p \leftrightarrow e_k$. Alors la matrice de l'endomorphise u dans la base e' est la matrice E_{kl} (faire un dessin et vérifier ce résultat même lorsque $p = q$ ou $k = l$). Donc les matrices E_{pq} et E_{kl} sont semblables. Pouvez-vous écrire la matrice de passage $P_{e \to e'}$ correspondante ? Quel est son inverse ?

$\boxed{Q\ 5}$ Soit $E = \mathbb{R}^2$ et $e = (e_1, e_2)$ la base canonique de E. Il existe un unique endomorphisme u de E ayant A comme matrice dans la base e. Puisque $A^2 = I$, $u^2 = \mathrm{id}$ et donc u est une symétrie vectorielle. Comme A n'est pas scalaire, $u \neq \mathrm{id}$ et $u \neq -\mathrm{id}$. Par conséquent, aucun des noyaux n'est réduit au vecteur nul. Ce sont des droites vectorielles car on sait que

$$E = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$$

Considérons $f_1 \neq 0$ un vecteur de $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id})$ et $f_2 \neq 0$ un vecteur de $\mathrm{Ker}(u + \mathrm{id})$. D'après le théorème sur les bases adaptées à une somme directe, $f = (f_1, f_2)$ est une base de E. Dans cette base,

$$D = Mat_f(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

De la même façon, il existe un unique endomorphisme v ayant $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ comme matrice dans la base canonique. Comme $B^2 = \mathrm{id}$, le même raisonnement montre que v est une symétrie vectorielle et permet de construire une base g dans laquelle $Mat_g(v) = D$.
Par conséquent, puisque A et D sont semblables et que B et D sont semblables, on en déduit que A et B sont semblables.

$\boxed{Q\ 6}$ Si $f^2 = 0$, $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Ker}\, f$. D'après le théorème du rang,

$$\dim \mathrm{Im}\, f + \dim \mathrm{Ker}\, f = 3$$

Comme $\dim \mathrm{Im}\, f \leq \dim \mathrm{Ker}\, f$, il vient que $3 \leq 2 \dim \mathrm{Ker}\, f$ et donc que $\dim \mathrm{Ker}\, f \geq 2$. Comme f n'est pas l'endomorphisme nul, $\dim \mathrm{Ker}\, f = 2$ et $\dim \mathrm{Im}\, f = 1$. Donc il existe un vecteur $e_1 \in E$ non-nul tel que $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(e_1)$. On complète en une base (e_1, e_3) de $\mathrm{Ker}\, f$ que l'on complète ensuite en une base (e_1, e_2, e_3) de E. Comme $f(e_2) \in \mathrm{Im}\, f$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(e_2) = \lambda e_1$. Mais λ n'est pas nul (sinon $f = 0$) ; on pose alors $\varepsilon_2 = \dfrac{1}{\lambda} e_2$. La matrice de f dans la base $e = (e_1, \varepsilon_2, e_3)$ est de la forme souhaitée. La réciproque est évidente.

$\boxed{Q\ 7}$

a. D'après la formule du rang,
$$n = \dim \operatorname{Ker} f + \operatorname{rg} f$$
donc $\operatorname{Ker} f$ est un hyperplan de E de dimension $(n-1)$. Comme $\operatorname{rg}(f) = \dim \operatorname{Im} f = 1$, il existe un vecteur $a \neq 0$ tel que $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(a)$. Puisque l'on a supposé que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0_E\}$, et que $\dim \operatorname{Im} f + \dim \operatorname{Ker} f = n$, on sait que
$$E = \operatorname{Vect}(a) \oplus \operatorname{Ker} f$$
le système (a) est une base de $\operatorname{Im} f$, et si l'on suppose $n \geq 2$, puisque $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$, il existe une base de $\operatorname{Ker} f$ de la forme $(\varepsilon_2 \dots, \varepsilon_n)$. Le théorème de la base adaptée à une somme directe nous dit alors que le système $\varepsilon = (a, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n)$ est une base de E. Comme $f(a) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(a)$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(a) = \lambda a$. La matrice de f dans la base ε est donc bien de la forme souhaitée.

b. Dans le cas où $a \in \operatorname{Ker} f$, on a $\operatorname{Im} f \subset \operatorname{Ker} f$ et donc $f^2 = 0$. Le résultat est montré avec $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$.
On peut donc supposer que $\operatorname{Im} f \not\subset \operatorname{Ker} f$ et alors $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$. D'après a), on a construit une base ε dans laquelle la matrice de f était simple : $A = \operatorname{Mat}_\varepsilon(f) = \lambda E_{11}$. On calcule alors $A^2 = \lambda^2 E_{11} E_{11} = \lambda^2 E_{11} = \lambda A$ et on en déduit que $f^2 = \lambda f$.

c. Supposons que $\operatorname{rg} f = 1$. Lorsque $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Ker} f = \{0\}$, on a construit une base ε dans laquelle la matrice de f s'écrivait $A = \lambda E_{11}$. Posons X' la matrice colonne avec un λ sur la première ligne et des zéros sur les autres lignes, et Y' la matrice colonne avec un 1 sur la première ligne et des zéros sur les autres lignes. Un calcul direct montre que
$$A = X' {}^t Y'$$
Mais puisque les matrices A et B représentent le même endomorphisme f dans deux bases différentes ε et e, elles sont semblables. En notant P la matrice de passage entre la base e et la base ε, on a
$$A = PBP^{-1} = (PX') {}^t Y' P^{-1} = (PX') {}^t ({}^t P^{-1} Y')$$
et il suffit de poser $X = PX' \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$ et $Y = {}^t P^{-1} Y' \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$ pour avoir $B = X {}^t Y$.
Si l'on suppose maintenant que $B = X {}^t Y$, en notant $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $Y = (y_i)_{1 \leq i \leq n}$, la matrice B s'écrit :
$$B = ((x_i y_j))_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \dots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \dots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \dots & x_n y_n \end{pmatrix}$$
On s'aperçoit que toutes les colonnes de cette matrice sont proportionnelles à la matrice colonne X. En utilisant l'algorithme du rang, on trouve que cette matrice est de rang 1 (la colonne X est non-nulle).