Ex 1 `classique`

On considère la matrice $J \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ remplie de 1 :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

a)Calculer J^2 puis pour $k \in \mathbb{N}$, J^k.
b) J est-elle inversible ?
c) On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculer les puissances successives de A.

Ex 2 `Important, à faire`

Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que ${}^tAA = 0_{p,p} \Rightarrow A = 0_{n,p}$

Ex 3 `Facile`

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des matrices qui commutent avec A. Montrer que $\mathcal{C}$ est un sev de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

Ex 4 `Moyen, classique à faire`

Trouver les matrices $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices symétriques.

Ex 5 `Facile, classique`

Existe-t-il deux matrices $(A,B) \in M_n(\mathbb{R})^2$ vérifiant $AB - BA = I_n$?

Ex 6 `Moyen, technique à connaître`

Soit deux matrices $A,B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que

$$\forall X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \quad \operatorname{Tr}(AX) = \operatorname{Tr}(BX)$$

Montrer que $A = B$.

Ex 7 `Moyen, classique à connaître`

Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A commute avec toutes les matrices diagonales. Montrer que A est une matrice diagonale.

Ex 8 `Facile, classique`

Soit une matrice U triangulaire supérieure telle que tous les éléments de la diagonale soient non-nuls. Montrer que la matrice U est inversible. (On montrera que $UX = 0 \Longrightarrow X = 0$)

Ex 9 `Moyen, raisonnement`

On se donne deux matrices $A,B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Trouver toutes les matrices $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant :

$$X + \operatorname{Tr}(X)A = B$$

Indication : Si X est une solution, prendre la trace de l'équation puis discuter.

Corrigé des exercices

$\boxed{Q\ 1}$ a) $J^2 = nJ$ puis par récurrence, pour $k \geq 1$, $J^k = n^{k-1} J$.

b) Puisque $J^2 = nJ$, il vient que $J(J - nI) = 0$ et alors si J était inversible, en multipliant à gauche par J^{-1}, on aurait $J = nI$ ce qui est faux pour $n \geq 2$.

c) Ici $n = 3$. Écrivons $A = 2I - J$ et en utilisant le binôme (I et J commutent), on trouve pour $n \geq 1$ que

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} (-1)^k J^k = 2^n I + \Big(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} (-1)^k 3^{k-1} \Big) J$$

Mais $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} (-1)^k 3^{k-1} = \dfrac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} (-3)^k - 1 \right) = \dfrac{(-1)^n - 1}{3}$. Et finalement,

$$A^n = 2^n I + \frac{(-1)^n - 1}{3} J$$

$\boxed{Q\ 2}$ Notons $A = ((a_{ij}))_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$. D'après la définition de la transposée d'une matrice, ${}^t A = ((\widetilde{a_{ij}}))_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq n}}$ où $\widetilde{a_{ij}} = a_{ji}$. Cherchons les coefficients de la matrice carrée ${}^t AA = ((b_{ij}))_{1 \leq i,j \leq p}$. En utilisant la définition du produit matriciel, pour tout $(i,j) \in [\![1,p]\!]^2$,

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{a_{ik}} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}$$

En particulier pour $j = i$,

$$\forall i \in [\![1,p]\!], \quad b_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2$$

Comme les coefficients sont réels, on a montré que

$$\forall (k,i) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], \quad a_{ki} = 0$$

Donc la matrice A est nulle.

Remarque : le résultat est faux pour une matrice A à coefficients complexes (une somme de carrés nulle n'implique pas que tous les termes sont nuls : $1^2 + i^2 = 0 \ldots$).

$\boxed{Q\ 3}$ On montre facilement que $\mathcal{C}$ est un sev de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. Soit $X = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice quelconque. On calcule :

$$AX = \begin{pmatrix} (a+b) & (c+d) \\ (-a+b) & (-c+d) \end{pmatrix} \text{ et } XA = \begin{pmatrix} (a-c) & (a+c) \\ (b-d) & (b+d) \end{pmatrix}$$

On en déduit que $AX = XA$ si et seulement si

$$b = -c \text{ et } a = d \Longleftrightarrow X = \begin{pmatrix} a & c \\ -c & a \end{pmatrix} = a \,\mathrm{id} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, $(\mathrm{id}\,, H)$ est un système générateur de $\mathcal{C}$ et on vérifie facilement qu'il est libre. C'est une base de $\mathcal{C}$ et donc $\dim \mathcal{C} = 2$.

$\boxed{Q\ 4}$ Soit une matrice $A = ((a_{ij}))$ qui commute avec toutes les matrices symétriques. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. La matrice E_{kk} est symétrique, et on calcule

$$AE_{kk} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij} E_{kk} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \delta_{jk} E_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} E_{ik}$$

$$E_{kk} A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{kk} E_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \delta k i E_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} E_{kj}$$

Par conséquent, les coefficients de la matrice AE_{kk} sont nuls, sauf sur la kième colonne où ce sont les coefficients de la kième colonne de la matrice A. De même, les coefficients de la matrice $E_{kk} A$ sont tous nuls sauf sur la kième ligne, où l'on retrouve les coefficients de la matrice A. Puisque $AE_{kk} = E_{kk} A$, on en déduit que $\forall (i,k) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq k \Rightarrow a_{ik} = a_{ki} = 0_{\mathbb{K}}$. La matrice A est donc nécessairement une matrice diagonale : $A = \sum_{i=1}^{n} d_i E_{ii}$. Considérons ensuite pour $(k,l) \in [\![1,n]\!]^2$, $k \neq l$, la matrice symétrique $S = E_{kl} + E_{lk}$. On calcule

$$AS = \sum_{i=1}^{n} d_i E_{ii} E_{kl} + \sum_{i=1}^{n} d_i E_{ii} E_{lk} = d_k E_{kl} + d_l E_{lk}$$

$$SA = \sum_{i=1}^{n} d_i E_{kl} E_{ii} + \sum_{i=1}^{n} d_i E_{lk} E_{ii} = d_l E_{kl} + d_k E_{lk}$$

Puisque le système (E_{kl}, E_{lk}) est libre, on trouve que $d_l = d_k$. En définitive, la matrice A doit être une matrice scalaire : $\exists \alpha \in \mathbb{K}$ tel que $A = \alpha I_n$. Réciproquement, une matrice scalaire commute avec toute matrice, donc avec toute matrice symétrique.

$\boxed{Q\ 5}$ Si $AB - BA = I_n$, en prenant la trace, on obtiendrait $\text{Tr}(AB) - \text{Tr}(BA) = \text{Tr}(I_n)$ et alors $\text{Tr}(I_n) = 0$ ce qui est faux.

$\boxed{Q\ 6}$ Si $A = ((a_{ij})$ et $X = ((x_{ij}))$, on calcule

$$\text{Tr}(AX) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_{ki}$$

En prenant $X = E_{pq}$, $x_{ki} = \delta_{kp}\delta_{iq}$, $\text{Tr}(AX) = a_{qp}$ et donc $\forall q,p \in [\![1,n]\!]$, $a_{qp} = b_{qp}$ et donc $A = B$.

$\boxed{Q\ 7}$ Notons $A = ((a_{ij}))$. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. Comme A commute avec la matrice E_{kk},

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij} E_{kk} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{kk} E_{ij}$$

et donc

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} E_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} E_{kj}$$

On en déduit que pour $i \neq j$, $a_{ij} = 0$ et donc que A est une matrice diagonale. La réciproque est claire.

$\boxed{Q\ 8}$ Soit une matrice colonne $X \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$ telle que $UX = 0$. On obtient un système d'équations triangulaire sur les coordonnées de X qui se résout de proche en proche en partant de la dernière équation et on obtient finalement que $X = 0$. Par conséquent, U est inversible.

$\boxed{Q\ 9}$ Soit une matrice $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ solution. Alors $\text{Tr}(X) + \text{Tr}(X)\,\text{Tr}(A) = \text{Tr}(B)$. Il faut étudier deux cas :

1. Si $\text{Tr}(A) \neq -1$, alors $\text{Tr}(X) = \dfrac{\text{Tr}(B)}{1 + \text{Tr}(A)}$ et alors $X = B - \dfrac{\text{Tr}(B)}{1 + \text{Tr}(A)} A$. On vérifie que réciproquement, cette matrice convient.
2. Si $\text{Tr}(A) = -1$, alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $X = B - \lambda A$. Réciproquement, $(B - \lambda A) + \text{Tr}(B - \lambda A)A = B + \text{Tr}(B)A$ et dans ce cas, il existe des solutions ssi $\text{Tr}(B) = 0$.

Conclusion : Si $\text{Tr}(A) \neq -1$, $\mathcal{S} = \{B - \dfrac{\text{Tr}(B)}{1 + \text{Tr}(A)}\}$. Si $\text{Tr}(A) = -1$ et $\text{Tr}(B) \neq 0$, $\mathcal{S} = \emptyset$. Si $\text{Tr}(A) = -1$ et $\text{Tr}(B) = 0$, alors $\mathcal{S} = \{B - \lambda A; \lambda \in \mathbb{R}\}$.