Ex 1 Facile

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère les sev

$$F = Vect((1,2,1,3),(2,0,0,1)) \text{ et } G = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + y + z = 0, x = y\right\}$$

a) Déterminer les dimensions des sev F et G.
b) Montrer que $F \cap G = \{0\}$.
c) En déduire que $\mathbb{R}^4 = F \oplus G$.

Ex 2 Facile

Soit l'espace vectoriel E des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 4. On considère l'ensemble

$$F = \{P \in E \mid P(0) = P'(0) = P'(1) = 0\}$$

a) Montrer que F est un ev, déterminer une base de F et préciser sa dimension.

b) Montrer que le sev $G = \mathrm{Vect}(1, X, 1 + X + X^2)$ est un supplémentaire de F dans E.

Ex 3 Facile

Soit un K-e.v. E de dimension finie n. Soient F et G deux s.e.v. de E vérifiant $\dim F + \dim G > n$. Montrer que $F \cap G \neq \{0_E\}$.

Ex 4 Moyen

Soit E un K-e.v. de dimension finie n. et deux hyperplans H_1, H_2 distincts de E. Calculer $\dim(H_1 \cap H_2)$.

Indication : On pourra montrer que $H_1 \cap H_2$ est un hyperplan de H_1.

Ex 5 Moyen, instructif

Soit un K-ev E et deux sev E_1, E_2 de E. Montrer que :

$$(\exists u \in L(E) \text{ tq } \operatorname{Ker} u = E_1 \text{ et } \operatorname{Im} u = E_2) \Longleftrightarrow (\dim E = \dim E_1 + \dim E_2)$$

Indication : Pour la réciproque,construire une base de E en complétant une base de E_1. Définir alors u en se donnant l'image de cette base.

Ex 6 Moyen

Soit un espace vectoriel E de dimension 3 et un endomorphisme u de E tel que u^2=0. Montrer que

$$\exists a \in E \quad \exists f \in E^\star \text{ tq } \forall x \in E, \quad u(x) = f(x).a$$

Indication : Traduire en terme d'image et de noyau la relation $u^2 = 0$. Introduire ensuite une base de $\operatorname{Ker} u$ et la compléter. Définir f à l'aide de cette base.

Ex 7 Moyen

Soit un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie n et deux endomorphismes $(u,v) \in L(E)$. Montrer que

$$\operatorname{rg} u + \operatorname{rg} v \leq \operatorname{rg}(u \circ v) + n$$

Indication : On pourra étudier la restriction $\widetilde{u}$ de u à $\operatorname{Im} v$ et montrer que $\operatorname{Im} \widetilde{u} = \operatorname{Im}(u \circ v)$ et $\operatorname{Ker} \widetilde{u} = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} v$, puis appliquer le théorème du rang à $\widetilde{u}$.

Ex 8 Facile, technique classique

On considère l'application linéaire

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P + P' + P'' \end{cases}$$

a) Montrer que l'endomorphisme ϕ est injectif.

b) Montrer que l'endomorphisme ϕ est surjectif.

Indication : Pour montrer la surjectivité, étudier la restriction de ϕ à $\mathbb{R}_n[X]$ qui est un espace de dimension finie.

Corrigé des exercices

$\boxed{Q\ 1}$ a) Par définition, $S_1 = (f_1,f_2)$ est générateur de F. On vérifie que ce système est libre. C'est une base de F et donc $\dim F = 2$. Il faut déterminer un système générateur de G :

$$G = \{x.(1,1,-3,0) + t(0,0,0,1); (x,t) \in \mathbb{R}^2\}$$

Donc $g_1 = (1,1,-3,0)$ et $g_2 = (0,0,0,1)$ forment un système générateur de G. On vérifie qu'il est libre. C'est donc une base de G et $\dim G = 2$.
c) D'après le théorème sur les dimensions d'une somme, puisque $\dim F + \dim G = \dim \mathbb{R}^4$ et $F \cap G = \{0\}$, $E = F \oplus G$.

$\boxed{Q\ 2}$ Déterminons F. Soit $P \in F$. Puisque $P(0) = P'(0) = 0$, 0 est racine double (au moins) de P. Donc $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = X^2Q$. En examinant les degrés, on obtient que $\deg Q \leq 2$. Donc $Q = aX^2+bX+c$. Alors $Q' = 2aX+b$. Comme $P' = 2XQ + X^2Q'$, et $P'(1) = 0$, on trouve que $4a+3b+2c = 0$. Donc $P = X^2(aX^2+bX-2a-\dfrac{3}{2}b)$ On vérifie réciproquement qu'un polynôme de cette forme est dans F. Donc

$$F = \{aX^4+bX^3-(2a+\frac{3}{2}b)X^2; (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \{a(X^4-2X^2)+b(X^3-\frac{3}{2}X^2); (a,b) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}(P_1,P_2)$$

où $P_1 = X^4-2X^2$ et $P_2 = X^3-\dfrac{3}{2}X^2$. On vérifie que (P_1,P_2) est un système libre (degrés distincts). C'est donc une base de F et alors $\dim F = 2$.
b) On vérifie que $(1,X,1+X+X^2)$ est un système libre (degrés étagés). C'est donc une base de G et alors $\dim G = 3$. On montre ensuite que $F \cap G = \{0\}$ et puisque $\dim E = 5 = \dim F + \dim G$, d'après le cours, $E = F \oplus G$.

$\boxed{Q\ 3}$ Utilisons la dimension d'une somme de sev :

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

On obtient que $\dim(F \cap G) = \dim F + \dim G - \dim(F+G) > n - \dim(F+G)$. Mais comme $F+G$ est un sev de E, $\dim(F+G) \leq n$ et donc $\dim(F \cap G) > 0$, donc finalement $F \cap G \neq \{0\}$.

$\boxed{Q\ 4}$ On a vu en cours que si H est un hyperplan d'un espace F de dimension p, alors $\dim H = p-1$. Nous utiliserons ce résultat. Comme H_2 est un hyperplan de E, il existe une forme linéaire sur E, $\phi \in E^\star$ non-nulle telle que $H_2 = \mathrm{Ker}\,\phi$. Considérons la restriction $\widetilde{\phi}$ de la forme linéaire ϕ au sous espace H_1. Il est clair que $\widetilde{\phi}$ est une forme linéaire de H_1 : $\widetilde{\phi} \in H_1^\star$.

1. $\widetilde{\phi} \neq 0_{H_1^\star}$: par l'absurde, si $\widetilde{\phi} = 0$, on aurait $\forall x \in H_1$, $\widetilde{\phi}(x) = \phi(x) = 0_K$ et donc on aurait $H_1 \subset H_2$. Mais puisque $\dim H_1 = \dim H_2 = n-1$, on aurait $H_1 = H_2$ ce qui est faux d'après l'énoncé ;
2. $H_1 \cap H_2 = \mathrm{Ker}\,\widetilde{\phi}$:
   - Soit $x \in H_1 \cap H_2$, $\widetilde{\phi}(x) = \phi(x) = 0_K$,
   - Soit $x \in \mathrm{Ker}\,\widetilde{\phi}$, $x \in H_1$ et $\widetilde{\phi}(x) = \phi(x) = 0_K$ et donc $x \in H_1 \cap H_2$;

Nous avons donc montré que $H_1 \cap H_2$ est un hyperplan de l'espace H_1 et puisque $\dim H_1 = n-1$, en utilisant le résultat du cours, il vient que $\dim(H_1 \cap H_2) = n-2$.

$\boxed{Q\ 5}$

- $(i) \Rightarrow (ii)$: d'après le théorème du rang,

$$\dim E = \dim \mathrm{Ker}\,u + \mathrm{rg}\,u = \dim E_1 + \dim E_2$$

- $(ii) \Rightarrow (i)$: si $E_1 = \{0\}$, alors $\dim E_2 = \dim E$ donc $E_2 = E$. En posant $u = \mathrm{id}$, on vérifie que u convient. De même si $E_2 = \{0\}$, $u = 0$ convient. Supposons maintenant que $E_1 \neq \{0\}$ et $E_2 \neq \{0\}$. Alors, il existe une base $(e_1,\dots,e_p)$ de E_1 ($p = \dim E_1$). Complétons cette base en une base de E : $e = (e_1,\dots,e_p,e_{p+1},\dots,e_n)$. Comme $\dim E_2 = n-p$, il existe une base de E_2 de la forme $(f_{p+1},\dots,f_n)$. Définissons alors u en se donnant l'image de la base e :

$$\forall i \in [1,p], u(e_i) = 0, \quad \forall i \in [p+1,n], u(e_i) = f_{i+1}$$

Alors, $\forall x \in E_1$, $u(x) = 0$ donc $E_1 \subset \mathrm{Ker}\,u$. Soit $x \in \mathrm{Ker}\,u$: décomposons x dans e.

$$x = x_1e_1 + \dots + x_pe_p + x_{p+1}e_{p+1} + \dots + x_ne_n$$

$u(x) = x_{p+1}e_{p+1} + \dots + x_ne_n = 0$. Mais comme f est libre, il vient que $x_{p+1} = \dots = x_n = 0$ et donc que $x \in E_1$.
D'autre part, $\mathrm{Im}\,u = \mathrm{Vect}(u(e_1),\dots,u(e_n)) = \mathrm{Vect}(f_{p+1},\dots f_n) = E_2$.

$\boxed{Q\ 6}$ La relation $u^2 = 0$ donne que $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$ (le montrer). D'après le théorème du rang,

$$3 = \dim(\operatorname{Ker} u) + \operatorname{rg} u \leq 2\dim(\operatorname{Ker} u)$$

ce qui implique que $\dim(\operatorname{Ker} u) \geq 2$. Si $\dim(\operatorname{Ker} u) = 3$, alors $u = 0$ et le résultat est évident avec $f = 0$ et a quelconque.
Supposons donc que $\dim(\operatorname{Ker} u) = 2$. Alors d'après le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Im} u) = 1$. C'est une droite vectorielle : $\exists a \in E$, $a \neq 0$ tq $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(a)$. Considérons une base (e_1,e_2) de $\operatorname{Ker} u$ et complétons-la en une base (e_1,e_2,e_3) de E. Puisque $u \neq 0$, $u(e_3) \neq 0$ et donc $\exists c \in \mathbb{R}$ tq $u(e_3) = ca$. Définissons la forme linéaire f en se donnant l'image de la base e par f : $f(e_1) = 0$, $f(e_2) = 0$ et $f(e_3) = c$. Soit alors $x \in E$. Décomposons x dans la base e : $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$. Alors $u(x) = x_3ca = x_3f(e_3)a = f(x)a$.

$\boxed{Q\ 7}$ Considérons la restriction de u à $\operatorname{Im} v$: $\widetilde{u} = u_{/\operatorname{Im} v}$. On vérifie facilement que $\operatorname{Im} u \circ v = \operatorname{Im} \widetilde{u}$ et que $\operatorname{Ker} \widetilde{u} = \operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} v$. En appliquant le théorème du rang à $\widetilde{u}$, on trouve que

$$\dim(\operatorname{Im} v) = \dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} v) + \operatorname{rg}(u \circ v)$$

Mais $\dim(\operatorname{Ker} u \cap \operatorname{Im} v) \leq \dim(\operatorname{Ker} u)$ et donc, en appliquant le théorème du rang pour u, on trouve que

$$\operatorname{rg} v \leq (n - \operatorname{rg} u) + \operatorname{rg}(u \circ v)$$

$\boxed{Q\ 8}$ a) Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P + P' + P'' = 0$. Alors, si l'on suppose que $P \neq 0$, notons $n = \deg P \geq 0$. On a $P = -(P' + P'')$. Mais alors $n \geq 1$ sinon P serait constant et alors $P' + P'' = 0$, ce qui est impossible. Alors, $\deg(P' + P'') \leq n - 1$, une absurdité. Donc ϕ est injective.
b) Soit un entier $n \in \mathbb{N}$. Notons ϕ_n la restriction de ϕ à $\mathbb{R}_n[X]$. Alors, si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi_n(P) = P + P' + P'' \in \mathbb{R}_n[X]$ car $\deg(\phi_n(P)) \leq \max(\deg P, \deg P', \deg P'') \leq n$. Donc ϕ_n est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ injectif, donc surjectif, car $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace de dimension finie $n + 1$.
Soit alors $P \in \mathbb{R}[X]$. Notons $n = \deg P$. Alors $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et donc $\exists Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\phi_n(Q) = P$. Mais alors $\phi(Q) = P$ et on a donc montré que ϕ est surjective !