Ex 1 `Facile, classique`

Soient deux réels $\alpha > 0,\beta > 0$. Déterminer la limite de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\alpha n + \beta k}$$

Ex 2 `Moyen`

Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n - t^{2n}}{1-t}\, dt$$

a. Justifier l'existence de I_n pour $n \geq 1$.
b. Déterminer la limite de la suite (I_n).

Ex 3 `Moyen, classique`

Etudier la suite de terme général

$$u_n = \frac{1}{n^4} \prod_{k=1}^{2n} \left(n^2 + k^2\right)^{1/n}$$

Ex 4 `Moyen, classique`

a. Écrire l'inégalité de Taylor-Lagrange pour l'exponentielle entre 0 et $X > 0$.
b. En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1]$

$$\left|(1+x^2)^{1/n} - 1 - \frac{1}{n}\ln(1+x^2)\right| \leq \frac{C}{n^2}$$

c. Trouver alors deux réels $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall n \geq 1$,

$$\int_0^1 (1+x^2)^{1/n}\, \mathrm{d}x = a + \frac{b}{n} + \frac{1}{n}\varepsilon_n$$

où $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Ex 5 `Moyen`

Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,h) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x+h)f(x-h) = (f(x))^2$$

Montrer qu'alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x)f(x) = (f'(x))^2$.

Ex 6 `Moyen`

On considère une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et deux réels $C,k > 0$ tels que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = 0$;
2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|f^{(n)}(x)| \leq Ck^n n!$.

a. Montrer en utilisant la formule de Taylor intégrale que $\forall x \in]-1/k,1/k[$, $f(x) = 0$;
b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$.

Corrigé des exercices

Q 1 Soit $n \geq 1$. Ecrivons

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\alpha + \beta k/n}$$

On reconnaît alors une somme de Riemann. Posons $f : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1/(\alpha+\beta x) \end{cases}$. Cette fonction est continue sur le segment $[0,1]$ et donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$. Reste à calculer cette intégrale :

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = [\ln(\alpha+\beta x)]_0^1 = \ln(1+\alpha/\beta)$$

.

Q 2 Soit $t \in [0,1[$. Puisque $1 - t^n = 1 + t + \cdots + t^{n-1}$,

$$\frac{t^n - t^{2n}}{1-t} = t^n(1 + t + \cdots + t^{n-1}) = \sum_{k=n}^{2n-1} t^k \xrightarrow[x\to 1^-]{} n$$

Donc à n fixé, la fonction à intégrer se prolonge par continuité sur le segment $[0,1]$, donc l'intégrale I_n existe. D'après ce calcul, on peut exprimer I_n à l'aide d'une somme :

$$I_n = \sum_{p=n}^{2n-1} \frac{1}{p+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

On reconnaît une somme de Riemann :

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\frac{n}{k}+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k/n)$$

où $f : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x+1} \end{cases}$ est une fonction continue sur le segment $[0,1]$. donc

$$I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \boxed{\ln 2}$$

Q 3 Comme les termes de u_n sont strictement positifs, nous pouvons transformer le produit en somme en utilisant le logarithme. Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln u_n$. On calcule alors

$$v_n = -4\ln n + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} \ln\left[n^2(1+k^2/n^2)\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{2n} \ln(1+k^2/n^2)$$

On reconnaît alors une somme de Riemann, associée à la subdivision du segment $[0,1]$ en $2n$ intervalles en écrivant

$$v_n = 2 \times \frac{1}{(2n)}\sum_{k=1}^{2n} \ln\left(1 + 4\frac{k^2}{(2n)^2}\right)$$

Comme la fonction $f : \begin{cases} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1+4x^2) \end{cases}$ est continue sur le segment $[0,1]$, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2I = 2\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$. En intégrant par parties cette intégrale, on trouve que $I = \ln 5 - 2 + 4\arctan 2$ et donc finalement, $u_n = e^{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{5}{e^2}e^{4\arctan 2}$.

Q 4 a) Ecrivons l'inégalité de Taylor-Lagrange pour l'exponentielle entre 0 et X :

$$|e^X - (1+X)| \leq \frac{X^2}{2}e^X$$

car $M_2 = \sup_{x\in[0,X]}|e^x| = e^X$.

b) Soit $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Avec $X = \dfrac{1}{n}\ln(1+x^2)$, puisque $(1+x^2)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(1+x^2)}$, on trouve que

$$|(1+x^2)^{\frac{1}{n}} - (1+\frac{1}{n}\ln(1+x^2))| \le \frac{\ln^2(1+x^2)}{2n^2}(1+x^2) \le \frac{\ln^2(2)}{n^2}$$

car $(1+x^2 \le 2)$. Posons $a = \int_0^1 dt = 1$ et $b = \int_0^1 \ln(1+x^2)dx$. On a alors

$$\varepsilon_n = \Bigl|\int_0^1 (1+x^2)^{\frac{1}{n}}dx - a - \frac{b}{n}\Bigr| = \Bigl|\int_0^1 \Bigl[(1+x^2)^{\frac{1}{n}} - 1 - \frac{1}{n}\ln(1+x^2)\Bigr]dx\Bigr| \le \int_0^1 \frac{C}{n^2}dx \le \frac{C}{n^2}$$

Donc $\int_0^1 (1+x^2)^{\frac{1}{n}} = a + \dfrac{b}{n} + \varepsilon_n$ et $|n\varepsilon_n| \le \dfrac{C}{n}$, donc $\varepsilon_n = o(\dfrac{1}{n})$.
Il ne reste plus qu'à calculer b par parties :

$$b = \int_0^1 \ln(1+x^2)dx = \bigl[x\ln(1+x^2)\bigr]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}dx = \ln 2 - 2 + \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \boxed{\ln 2 - 2 + \frac{\pi}{4}}$$

$\boxed{Q\ 5}$ Ecrivons la formule de Taylor-Young pour la fonction f entre x et $x+\theta$:

$$f(x+\theta) = f(x) + \theta f'(x) + \frac{\theta^2}{2}f''(x) + \theta^2\varepsilon(\theta) \quad (\varepsilon(\theta) \xrightarrow[\theta\to 0]{} 0)$$

Si $h \neq 0$, en prenant $\theta = h$ et $\theta = -h$, on trouve que

$$f(x)^2 = f(x+h)f(x-h) = \Bigl[f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + h^2\varepsilon(h)\Bigr]\Bigl[f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + h^2\varepsilon(-h)\Bigr]$$

En développant et en ordonnant par rapport aux puissances de h, on trouve que

$$0 = h^2\Bigl[-(f')^2(x) + f(x)f''(x)\Bigr] + h^2\phi(h)$$

avec $\phi(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$. En divisant par h^2 et en faisant tendre h vers 0, on obtient le résultat.

$\boxed{Q\ 6}$ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. D'après la formule de Taylor intégrale, on peut écrire

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Mais en utilisant la majoration de l'énoncé, $\forall t \in [0,x]$, $|f^{(n+1)}| \le Ck^{n+1}(n+1)!$, on majore :

$$\begin{aligned}|f(x)| &\le \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}|f^{(n+1)}(t)|\,\mathrm{d}t\\ &\le Ck^{n+1}\frac{(n+1)!}{n!}\int_0^x (x-t)^n\,\mathrm{d}x\\ &= Ck^{n+1}(n+1)\int_0^1 x^n(1-u)^n\,\mathrm{d}u \quad (t = xu,\ dt = xdu)\\ &= Ck(kx)^n\end{aligned}$$

En faisant de même si $x < 0$, on trouve que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |f(x)| \le Ck|kx|^n$$

Mais si $|kx| < 1$, puisque la suite géométrique de raison (kx) converge vers 0, par passage à la limite dans les inégalités, on obtient que $|f(x)| \le 0$. Nous avons donc montré que

$$\forall x \in]-1/k,1/k[, \quad f(x) = 0$$

En considérant ensuite la translatée $g(x) = f(x - 1/(2k))$, puisque la fonction g est nulle sur un voisinage de 0, elle vérifie exactement les mêmes hypothèses que f. On en déduit que f est nulle sur le segment $]-1/k,3/(2k)[$ et par récurrence que f est nulle sur tous les intervalles $]-1/k,n/k[$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Donc f est nulle sur l'intervalle $[-1/k,+\infty[$. En considérant de façon symétrique les translatées à gauche, de la forme $g(x) = f(x + n/(2k))$, on montre ensuite que f est nulle sur $\mathbb{R}$.