Ex 1 `Facile, à faire`

Calculer les limites de suites définies par :

a. $I_n = \displaystyle\int_0^n \frac{\sin(nx)}{n^2+x^4}\,\mathrm{d}x.$

b. $J_n = \displaystyle\int_0^{n^2} \frac{\sin(nx)}{n^2+x^4}\,\mathrm{d}x.$

Ex 2 `Moyen`

Soit deux fonctions continues et positives $f,g : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$. On suppose que $\forall x \in [0,1],\ f(x)g(x) \geq 1$. Montrer que

$$\left[\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\right]\left[\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t\right] \geq 1$$

Etudier le cas d'égalité.

Ex 3 `Facile`

Trouver la limite de la suite de terme général

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^1 (\arcsin x)^n dx$$

Ex 4 `Moyen, classique`

Soit une fonction $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ continue. Trouver la limite de la suite de terme général

$$I_n = n\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ex 5 `Moyen, classique`

On considère la suite de terme général

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

a) Trouver $\lim_{n\to+\infty} I_n$

b) Trouver une relation de récurrence simple entre I_n et I_{n-1} pour $n \geq 1$.

On considère ensuite la suite de terme général

$$S_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

c) Exprimer pour $n \geq 1$, S_n en utilisant I_n.

d) En déduire que la suite (S_n) converge et préciser sa limite.

Ex 6 `Facile, à faire`

En utilisant un bon changement de variables, calculer pour $0 < a < b$, l'intégrale

$$I = \int_a^b (x-a)^3(b-x)^4 dx$$

Ex 7 `Facile`

Soit un réel $a > 0$. Calculer en utilisant un bon changement de variables, l'intégrale

$$I = \int_{1/a}^{a} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$$

Indication : Comment laisser les bornes invariantes?

Ex 8 `Facile`

Calculer en utilisant un bon changement de variables l'intégrale

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$$

Indication : Comment laisser les fonctions $\sin t$, $\cos^2 t$ et les bornes invariantes?

Ex 9

Soit une fonction f continue sur $\mathbb{R}$. Déterminer la limite lorsque $x \to 0$ de la fonction définie par

$$I(x) = \int_0^x \frac{x}{x^2+t^2} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Indication : Faire un changement de variables qui fera apparaître la variable x à l'intérieur de f.

Ex 10 `Facile`

Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[a,b]$. Montrer que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}\left[f(a)+f(b)\right] + \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,\mathrm{d}x$$

Ex 11 `Facile, classique`

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[0,1]$ vérifiant $f(1) = f'(1) = 0$. Etudier la suite de terme général

$$I_n = n^2 \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

Ex 12 `Classique`

On se propose d'étudier la fonction définie par $F(x) = \int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch} t}{t^2} dt$.

a) Montrer que $D_F = \mathbb{R}^\star$.
b) Etudier la parité de la fonction F.
c) Calculer la dérivée de la fonction F et dresser son tableau de variations.
d) Calculer la limite de la fonction F en 0 et en $+\infty$.

Ex 13 `Moyen, classique`

Soient deux fonctions f et g continues et positives sur l'intervalle $[0,+\infty[$. On suppose que

$$\forall x \geq 0, \quad f(x) \leq C + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

où C est une constante strictement positive.
a) Montrer que $\forall x \geq 0$,

$$f(x) \leq C \exp\left(\int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

C'est le *lemme de Gronwall*, très utile pour étudier des équations différentielles.
b) Que peut-on dire si $f(x) \leq \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$?

Indication : Introduire la fonction

$$F(x) = C + \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

et calculer sa dérivée.

Corrigé des exercices

$\boxed{Q\ 1}$

a. Majorons en *valeur absolue* : soit $n \geq 1$.

$$|I_n| \leq \int_0^n \frac{|\sin(nx)|}{n^2+x^2}\,\mathrm{d}x$$

Puisque $\forall x \in [0,n]$, $|\sin(nx)| \leq 1$ et que $x^2 \geq 0$, $\dfrac{|\sin(nx)|}{x^4+n^2} \leq \dfrac{1}{n^2}$. Par conséquent,

$$|I_n| \leq \int_0^n \frac{1}{n^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Par le théorème de majoration, $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

b. La majoration de a) ne suffit plus. On va garder le x au dénominateur pour x « grand ». Pour cela, découpons l'intégrale en deux :

$$|J_n| = \left|\int_0^n \frac{\sin(nx)}{n^2+x^4}\,\mathrm{d}x + \int_n^{n^2} \frac{\sin(nx)}{n^2+x^4}\,\mathrm{d}x\right| \leq |I_n| + \int_n^{n^2} \frac{|\sin(nx)|}{n^2+x^4}\,\mathrm{d}x$$

Mais pour $x \in [n,n^2]$, $\dfrac{|\sin(nx)|}{n^2+x^4} \leq \dfrac{1}{x^4} \leq \dfrac{1}{n^4}$ et donc

$$\int_n^{n^2} \frac{|\sin(nx)|}{n^2+x^4}\,\mathrm{d}x \leq \int_n^{n^2} \frac{1}{n^4}\,\mathrm{d}x = \frac{n^2-n}{n^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

On conclut grâce au théorème de majoration que $J_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$\boxed{Q\ 2}$ D'après Cauchy-Schwarz :

$$1 \leq \int_0^1 \sqrt{fg(t)}\,\mathrm{d}t \leq \sqrt{\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t}$$

S'il y a égalité dans Cauchy-Schwarz, il est nécessaire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $g = \lambda f$ (ou alors $f = \lambda g$). De plus, pour avoir $1 = \int_0^1 \sqrt{fg(t)}\,\mathrm{d}t$, il faut que $\int_0^1 \left[\sqrt{fg(t)} - 1\right]\,\mathrm{d}t = 0$. Comme la fonction intégrée est continue et positive, et que son intégrale est nulle, d'après un théorème la fonction est nulle. Par conséquent, les deux fonctions f et g doivent être constantes et inverses l'une de l'autre. On vérifie la réciproque facilement.

$\boxed{Q\ 3}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\forall x \in [0,1]$, en encadrant l'intégrale I_n, on obtient $0 \leq \arcsin x \leq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n!}(\pi/2)^n$. Si l'on pose $a_n = \dfrac{1}{n!}(\pi/2)^n$, on vérifie que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, d'où l'on déduit $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'après le théorème de comparaison logarithmique. Par conséquent, $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

$\boxed{Q\ 4}$ $I_n = n\int_0^1 x^n\,[f(x) - f(1)]\,\mathrm{d}x + n\int_0^1 x^n f(1)\,\mathrm{d}x$. Mais la deuxième intégrale tend vers $f(1)$ et la première se majore en la découpant au voisinage de 1. On montre qu'elle tend vers 0.

1. $n\int_0^1 x^n f(1)\,\mathrm{d}x = f(1)\dfrac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)$.
2. Comme f est continue sur le segment $[0,1]$, elle est bornée. Notons $M = \sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue au point 1, il existe $c \in]0,1[$ tel que $\forall x \in [c,1]$, $|f(x) - f(1)| \leq \varepsilon$. Alors

$$\begin{aligned}\left|n\int_0^1 x^n(f(x) - f(1))\,\mathrm{d}x\right| &\leq n\int_0^1 x^n|f(x) - f(1)|\,\mathrm{d}x \\ &\leq n\int_0^c x^n 2M\,\mathrm{d}x + n\int_c^1 x^n\varepsilon\,\mathrm{d}x \\ &\leq 2M\frac{n}{n+1}c^n + \frac{n}{n+1}(1-c^n)\varepsilon \\ &\leq 2Mc^n + \varepsilon\end{aligned}$$

Comme $|c| < 1$, la suite géométrique (c^n) converge vers 0. Par conséquent, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $|n\int_0^1 x^n(f(x) - f(1))\,\mathrm{d}x| \leq 2\varepsilon$. Donc, la première suite tend vers 0.

En conclusion, $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)$.

$\boxed{Q\ 5}$ a) Soit un entier $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\forall t \in [0,1]$, on a la majoration $\dfrac{t^n}{1+t} \leq t^n$, on encadre l'intégrale I_n :

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$$

Par le théorème des gendarmes, on en déduit que $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

b) Ecrivons pour $n \geq 1$,

$$I_n = \int_0^1 \frac{(t+1-1)t^{n-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{n-1}\,\mathrm{d}t - I_{n-1} = \frac{1}{n} - I_{n-1}$$

Alors, $I_n = \dfrac{1}{n} - I_{n-1}$.

c) En exprimant I_n en fonction de I_0, on trouve que

$$I_n = \frac{1}{n} - I_{n-1} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} + I_{n-2} = \cdots = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{1} + (-1)^n I_0$$

En multipliant par $(-1)^{n-1}$, on trouve alors que $(-1)^{n-1}I_n = S_n - I_0$. Finalement

$$S_n = I_0 + (-1)^{n-1} I_n$$

d) Puisque $|(-1)^{n-1}I_n| = I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il vient que $S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} I_0$. Mais $I_0 = \int_0^1 \dfrac{dt}{1+t} = \ln 2$ et donc la suite (S_n) converge vers $\ln 2$.

$\boxed{Q\ 6}$ Effectuons le changement de variables $y = b - x,\ \mathrm{d}y = -\,\mathrm{d}x$.

$$I = \int_0^{b-a} (b-a-y)^3 y^4 dy$$

En faisant ensuite le changement de variables $z = \dfrac{y}{b-a},\ \mathrm{d}y = (b-a)\,\mathrm{d}z$, on trouve que

$$I = (b-a)^8 \int_0^1 z^4 (1-z)^3 dz$$

En développant, on obtient

$$\boxed{I = \frac{1}{280}(b-a)^8}$$

$\boxed{Q\ 7}$ Par le changement de variables $t = \frac{1}{x},\ \mathrm{d}t = -\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2}$, on trouve que $I = 0$.

$\boxed{Q\ 8}$ Faire le changement de variables $t = \pi - x,\ \mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}x$. On trouve que $2I = -\int_0^\pi \dfrac{\pi \sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$. En effectuant ensuite le changement de variables $u = \cos t,\ \mathrm{d}u = -\sin t\,\mathrm{d}t$, on trouve finalement que $I = \dfrac{\pi^2}{4}$.

$\boxed{Q\ 9}$ Par le changement de variables $t = xu$, on trouve que

$$I(x) = \int_0^1 \frac{f(xu)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

Montrons que $I(x) \xrightarrow[x\to 0]{} f(0)\pi/4$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue au point 0, il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [0,\alpha]$, $|f(x) - f(0)| \leq \varepsilon$. Soit alors $x \in [0,\alpha]$,

$$|I(x) - f(0)\int_0^1 \frac{du}{1+u^2}| \leq \int_0^1 \frac{|f(ux) - f(0)|}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \leq \varepsilon$$

En effet, si $u \in [0,1]$, on a $0 \leq ux \leq x \leq \alpha$ et donc $\dfrac{|f(ux) - f(0)|}{1+u^2} \leq \varepsilon$, ce qui permet de majorer l'intégrale.

$\boxed{Q\ 10}$ Intégrer par parties la deuxième intégrale.

$\boxed{Q\ 11}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Par deux intégrations par parties, on trouve que

$$I_n = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \int_0^1 x^{n+2} f''(x)\ \mathrm{d}x$$

Mais puisque $\dfrac{n^2}{(n+1)(n+2)} \sim 1$, en posant $M_2 = \sup_{x\in[0,1]}|f''(x)|$ (qui existe puisque f'' est continue sur le segment $[0,1]$), on obtient la majoration suivante :

$$|\int_0^1 x^{n+2} f''(x)\ \mathrm{d}x| \leq \int_0^1 x^{n+2}|f''(x)|\ \mathrm{d}x \leq M_2 \int_0^1 x^{n+2}\ \mathrm{d}x \leq \frac{M_2}{n+3}$$

Alors d'après le théorème de majoration, $\int_0^1 x^{n+2} f''(x)dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc

$$\boxed{I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

$\boxed{Q\ 12}$ a) La fonction définie par $f(t) = \frac{\operatorname{ch} t}{t^2}$ est continue sur l'intervalle $I =]0,+\infty[$ et les fonctions $u(x) = x$, $v(x) = 2x$ sont dérivables sur l'intervalle $J =]0,+\infty[$ à valeurs dans I. D'après le théorème fondamental, F est définie et dérivable sur $J =]0,+\infty[$. De même, la fonction f est continue sur l'intervalle $]-\infty,0[$ et les fonctions u,v sont dérivables de l'intervalle $]-\infty,0[$ vers l'intervalle $]-\infty,0[$. Donc la fonction F est également définie et dérivable sur l'intervalle $]-\infty,0[$. Par conséquent, $D_F =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$.
b) Par le changement de variables $u = -t$, on montre que $F(-x) = \int_{-x}^{-2x} f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_x^{2x} f(-t)\ \mathrm{d}t = -F(x)$ car la fonction f est paire. La fonction F est donc *impaire*. On ne fera donc l'étude que sur $]0,+\infty[$.
c) Calculons pour $x \in]0,+\infty[$,

$$F'(x) = 2\frac{\operatorname{ch}(2x)}{(2x)^2} - \frac{\operatorname{ch} x}{x^2} = \frac{2\operatorname{ch}^2 x - 2\operatorname{ch} x - 1}{x^2}$$

Pour trouver les valeurs $x > 0$ telles que $F'(x) = 0$, on résout une équation du second degré en $\operatorname{ch} x$ et l'on trouve que $\operatorname{ch} x = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$. On résout ensuite une équation du second degré en e^x et l'on trouve que $e^x = (1+\sqrt{3}) + \sqrt{2\sqrt{3}}$. Finalement $x_0 = \ln(1+\sqrt{3}+\sqrt{2\sqrt{3}})$. La fonction F' est négative sur l'intervalle $]0,x_0[$ et positive sur l'intervalle $]x_0,+\infty[$.
d) Soit $x > 0$. Puisque $\forall t \in [x,2x]$, $\dfrac{\operatorname{ch} x}{4x^2} \leq f(t) \leq \dfrac{\operatorname{ch}(2x)}{x^2}$, on en déduit que

$$\frac{\operatorname{ch} x}{4x} \leq F(x) \leq \frac{\operatorname{ch} x}{x}$$

et d'après le théorème des gendarmes, on obtient que $\lim_{x\to 0} F(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = +\infty$.

$\boxed{Q\ 13}$ Soit $\phi(x) = C + \int_0^x f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$. D'après le théorème fondamental, la fonction ϕ est dérivable et $\forall x \geq 0$,

$$\phi'(x) = f(x)g(x) \leq g(x)\phi(x)$$

Introduisons donc la fonction $\psi(x) = e^{-\int_0^x g(t)\ \mathrm{d}t}\phi(x)$. On a alors

$$\psi'(x) = e^{-\int_0^x g(t)\ \mathrm{d}t}\left(\phi'(x) - g(x)\phi(x)\right) \leq 0$$

Donc ψ est décroissante sur $[0,+\infty[$ et donc puisque $\psi(0) = C$,

$$\forall x \geq 0, \psi(x) \leq C \Rightarrow f(x) \leq \phi(x) \leq Ce^{\int_0^x g(t)\ \mathrm{d}t}$$

Lorsque $C = 0$,on trouve que f est nulle sur $[0,+\infty[$.