Ex 1 Facile

Soit l'application

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P - XP' \end{array} \right.$$

Montrer que ϕ est un endomorphisme. Déterminer son noyau et son image.

Ex 2 Classique, à faire

Soit $A = X^{100} - X^4 + X - 1$ et $B = X^3 + X^2 + X + 1$. Trouver le reste de la division de A par B.

Ex 3 À faire

Soit $n \geq 1$. Trouver une CNS pour que $(X-1)^2 / aX^{n+1} + bX^n + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$. Trouver le quotient.

Ex 4 À faire

Trouver tous les polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ divisibles par $(X-1)$ ayant même reste dans les divisions euclidiennes par $(X-2)$, $(X-3)$, $(X-4)$.

Ex 5 Taylor

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et r et s les restes de la division de P par $(X-a)$ et par $(X-b)$. Quel est le reste de la division de P par $(X-a)(X-b)$? (on déterminera ce reste en fonction de r,s lorsque $a \neq b$ et si $a = b$, en fonction de $P(a)$ et $P'(a)$.

Indication : Lorsque $a = b$, utiliser la formule de Taylor.

Ex 6 Classique

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$P - XP' = X$$

Ex 7 Moyen, instructif

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$P(X^2) = (P(X))^2$$

Ex 8 Moyen

Déterminer les polynômes non-constants de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$P'/P$$

Indication : Etudier le degré du quotient, et utiliser la formule de Leibnitz

Ex 9 Moyen

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$P(X+1) - 2P(X) + P(X-1) = 0$$

Indication : Utiliser une formule de Taylor.

Ex 10 À faire

Montrer qu'il n'existe pas de réels (u,v,w) vérifiant :

$$u + v + w = 3 \quad \text{et} \quad uv + vw + wu = 6$$

Indication : Utiliser les relations coefficients-racines et le théorème de Rolle.

Ex 11 À faire

Soit $P(X) = X^3 + X - 1 \in \mathbb{C}[X]$. On note x_k ses trois racines complexes.

a) Vérifier (sans chercher à les calculer) que les trois racines sont distinctes

b) Effectuer la division euclidienne de X^5 par P.

c) En déduire la valeur de

$$S = \sum_{k=1}^{3} x_k^5$$

Ex 12 `Moyen`

Résoudre dans $\mathbb{C}$,

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 0 \\ |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \\ z_1 z_2 z_3 = 1 \end{cases}$$

Ex 13 `Cours, à faire`

Décomposer en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P(X) = X^8 + X^4 + 1$.

Corrigé des exercices

$\boxed{Q\ 1}$ On montre facilement que ϕ est linéaire. Soit un polynôme $P \in \operatorname{Ker}\phi$. Si $P \neq 0$, on peut écrire $P = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0$ avec $a_n \neq 0$. Alors $P = XP'$ d'où $a_n X^n + \dots = n a_n X^n + \dots$. En identifiant les termes de plus haut degré, on trouve que $a_n(1-n) = 0$. Donc, puisque $a_n \neq 0$, $n = 1$. Mais si $n = 1$, $P = aX + b$ et alors $P = XP' \Rightarrow b = 0$. Donc $P = aX$. Réciproquement, si $P = aX$, $(a \in \mathbb{R})$, on a bien $P = XP'$. En conclusion, $\boxed{\operatorname{Ker}\phi = \operatorname{Vect}(X)}$.

Déterminons $\operatorname{Im}\phi$. Soit $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k \in \operatorname{Im}\phi$. Alors il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P - XP' = Q$. En examinant les degrés, il faut que $\deg P = n$. Posons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On doit donc avoir $\forall k \in [0,n]$, $(1-k)a_k = b_k$. Une condition nécessaire pour que $Q \in \operatorname{Im}\phi$ est donc que $b_1 = 0$. Réciproquement, si $b_1 = 0$, en posant $a_k = \dfrac{b_k}{1-k}$ pour $k \neq 1$ et $a_1 = 0$, on a bien $\phi(P) = Q$. En conclusion, $\boxed{\operatorname{Im}\phi = \{b_n X^n + \dots + b_0 ; b_1 = 0\}}$.

$\boxed{Q\ 2}$ Remarquons que $(1-X)B = 1 - X^5$ et donc que modulo B, X^4 mod 1, alors A mod $1 - 1 + X - 1$ mod $X - 1$ le reste vaut donc $X - 1$.

$\boxed{Q\ 3}$ Notons $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$. $(X-1)^2$ divise P ssi 1 est racine double au moins de P, c'est à dire $P(1) = P'(1) = 0$. On trouve donc que $a = n$ et $b = -(n+1)$. On a alors

$$P = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1 = nX^n(X-1) - (X^n - 1) = (X-1)[nX^n - X^{n-1} - X^{n-2} - \dots - X - 1]$$

Mais en factorisant,

$$nX^n - X^{n-1} - \dots - X - 1 = (X-1)[nX^{n-1} + (n-1)X^{n-2} + \dots + 3X^2 + 2X + 1]$$

Donc

$$\boxed{Q = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)X^k}$$

$\boxed{Q\ 4}$ Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$ un polynôme vérifiant ces propriétés. Alors il s'écrit

$$P = (X-1)(aX^2 + bX + c)$$

La condition sur les restes s'écrit $P(2) = P(3) = P(4)$ et l'on trouve que

$$P = \lambda(X-1)(X^2 - 8X + 18)$$

$\boxed{Q\ 5}$ Si $a \neq b$, $R = \dfrac{P(a) - P(b)}{a-b} X + \dfrac{bP(a) - aP(b)}{b-a}$, car il suffit d'écrire $P = (X-a)(X-b)Q + \alpha X + \beta$. On fait $x = a$, puis $x = b$ pour tirer α et β en fonction de $r = P(a)$ et $s = P(b)$.
Si $a = b$, on écrit la formule de Taylor:

$$P(X) = P(a) + (X-a)P'(a) + (X-a)^2 Q(X)$$

et le reste vaut alors $P(a) + (X-a)P'(a)$.

$\boxed{Q\ 6}$ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Supposons que $P - XP' = X$. Alors $P \neq 0$. Notons $n = \deg P$. Comme $\deg(P - XP') \leq n$, il faut que $n \geq 1$. Mais si l'on cherche le coefficient de X^n dans $P - XP'$, on trouve $(n-1)a_n$. Par conséquent, si $n = 1$, $\deg(P - XP') \leq 0$ et ce n'est pas possible, et si $n \geq 2$, $\deg(P - XP') = n$, ce qui n'est pas possible non plus. Il n'existe donc aucun polynôme vérifiant la propriété.

$\boxed{Q\ 7}$ Supposons P non-nul. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ une racine complexe de P. On montre par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, α^{2^k} est encore racine de P. Mais puisque P n'admet qu'un nombre fini de racines, il est nécessaire qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\alpha^{2^k} = \alpha$$

Par conséquent, $\alpha = 0$ ou alors $\alpha^{2^k - 1} = 1$, et alors $|\alpha| = 1$. On peut alors noter $\alpha = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [0,2\pi]$.

Comme $(P(e^{i\frac{\theta}{2}}))^2 = P(e^{i\theta})$, alors $e^{i\frac{\theta}{2}}$ est encore racine. Par récurrence, on montre que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $e^{i\dfrac{\theta}{2^k}}$ est encore racine. La seule possibilité pour qu'il y ait un nombre fini de racines est que $\theta = 0$, c'est à dire $\alpha = 1$.
Les seules racines de P sont donc 0 et 1. Donc $P = \lambda X^n(1-X)^p$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $P(X^2) = P(X)^2 \Rightarrow \lambda X^{2n}(1-X)^p(1+X)^p = \lambda X^{2n}(1-X)^{2p}$ et nécessairement,

$$\boxed{P = X^n}$$

On vérifie réciproquement que les polynômes de la base canonique et le polynôme nul conviennent.

$\boxed{Q\ 8}$ On écrit $P = QP'$ avec $\deg Q = 1$: $Q = \lambda(X - a)$. En identifiant les coefficients de X^n, on trouve $\lambda = \frac{1}{n}$ et donc :

$$nP = (X - a)P'$$

En utilisant Leibnitz, $nP^{(k)} = (X - a)P^{(k+1)} + kP^{(k)}$. D'où $(n - k)P^{(k)} = (X - a)P^{(k+1)}$. On a alors $P^k(a) = 0$ pour $k \in [0,n]$ et donc $(X - a)^n / P$. Alors $P = \lambda(X - a)^n$. On vérifie réciproquement que tout polynôme de cette forme convient.

$\boxed{Q\ 9}$ Ecrivons les deux formules de Taylor :

$$P(X + 1) = P(X) + P'(X) + \frac{1}{2!}P''(X) + \cdots + \frac{1}{n!}P^{(n)}(X)$$

$$P(X - 1) = P(X) - P'(X) + \frac{1}{2!}P''(X) + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}P^{(n)}(X)$$

Alors la condition de l'énoncé dit que :

$$P''(X) + \frac{1}{4!}P^{(4)}(X) + \cdots = 0$$

Mais alors $P''(X) = 0$. En effet, si $P''(X) \neq 0$, $P''(X) = a_n X^n + \dots$ avec $a_n \neq 0$. Mais en cherchant le terme en X^n dans l'égalité précédente, on trouve qu'il vaut $a_n X^n$ (tous les polynômes $P^{(4)}, \dots$ sont de degré strictement inférieur à n. Donc P est un polynôme de degré ≤ 1:

$$P(X) = aX + b$$

Et on vérifie réciproquement que tout polynôme de cette forme convient.

$\boxed{Q\ 10}$ u,v,w seraient racines de $P(X) = X^3 - 3X^2 + 6X + c$. Mais d'après Rolle, P' posséderait alors deux racines réelles distinctes, ce qui est faux.

$\boxed{Q\ 11}$ a) Par l'absurde, si x est une racine double de P, alors $P(x) = P'(x) = 0$. Mais $P'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\dfrac{i}{\sqrt{3}}$, qui ne sont pas des racines de P. Donc toutes les racines complexes de P sont simples.

b) On trouve que $X^5 = (X^2 - 1)P(X) + X^2 + X - 1$.

c) Si x_k est une racine de P, alors $x_k^5 = (x_k^2 - 1)P(x_k) + x_k^2 + x_k - 1 = x_k^2 + x_k - 1$. On peut alors exprimer la somme cherchée en fonction des fonctions symétriques élémentaires des racines de P:

$$S = \sum_{k=1}^{3} x_k^2 + \sigma_1 - 3 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2 + \sigma_1 - 3 = -2 - 3 = \boxed{-5}$$

$\boxed{Q\ 12}$ Il est clair que les racines cubiques de l'unité 1, j et j^2 sont un triplet de solutions.
Soient trois complexes (z_1,z_2,z_3) vérifiant les conditions. Ils sont racines du polynôme

$$P(X) = (X - z_1)(X - z_2)(X - z_3) = X^3 - (z_1 + z_2 + z_3)X^2 + (z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3)X - z_1z_2z_3 = 0$$

Mais puisque $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, et que $z_1z_2z_3 = 1$,

$$z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3 = \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_1} = \overline{z_3} + \overline{z_2} + \overline{z_3} = 0$$

puisque $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Par conséquent, les complexes z_1, z_2, z_3 sont racines du polynôme $P(X) = X^3 - 1$. Ce sont donc les racines cubiques de l'unité : $\{z_1,z_2,z_3\} = \{1,j,j^2\}$.

$\boxed{Q\ 13}$ Commencer par décomposer le polynôme bicarré $Y^4 + Y^2 + 1$. $Y^4 + Y^2 + 1 = (Y^2 + 1)^2 - Y^2 = (Y^2 + Y + 1)(Y^2 - Y + 1)$ Alors $P = (X^4 + X^2 + 1)(X^4 - X^2 + 1)$ et recommencer pour ces deux polynômes bicarrés. On obtient finalement que

$$P(X) = (X^2 + X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)(X^2 - \sqrt{3}X - 1)$$