Ex 1 `Facile`

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère les ensembles

$$F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x - y + t & = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \}$$

$$G = \{\lambda(1,1,2,0) + \mu(2,0,1,1) \ ; \ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\}$$

a. Donner une description paramétrique de F : écrire $F = \text{Vect}(\dots)$ et trouver un système d'équations de G. Vérifier (sans calculs) que F et G sont des sev de E.

b. Les deux sev F et G sont-ils supplémentaires ?

Ex 2 `Facile`

On considère un $\mathbb{R}$-ev E et un sev F de l'espace E. On pose $A = E \setminus F$.
a) Montrer que $\forall x \in F$, $\forall y \in A$, $x + y \in A$.
b) En déduire que si $F \neq E$, alors $\text{Vect}(A) = E$.

Ex 3 `Facile`

Soit un $\mathbb{K}$- e.v. E et un système $(a_1, \dots ,a_n) \in E^n$ libre de E. On pose

$$\begin{cases} b_1 & = a_1 \\ b_2 & = a_1 + a_2 \\ \vdots & \\ b_n & = a_1 + \dots + a_n \end{cases}$$

Montrer que le systeme de vecteurs $(b_1, \dots ,b_n)$ est libre.

Ex 4 `Facile`

Les systèmes de fonctions suivants sont-ils libres dans $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

a. $(f_1, \dots ,f_n)$ où $n \geq 2$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$,

$$f_i : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{x+i} \end{array} \right.$$

b. (f_1,f_2,f_3) où $\forall i \in [\![1,3]\!]$,

$$f_i : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x-i)^2 \end{array} \right.$$

c. (f_0,f_1,f_2,f_3) où $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$ et $f_3(x) = e^x$.

Ex 5 `Moyen`

On considère l'ensemble $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ des fonctions indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$. Montrer que c'est un $\mathbb{R}$-ev. On considère ensuite les applications

$$\phi_k : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f^{(k)}(0) \end{array} \right. \qquad (k \in [\![1,n]\!])$$

Montrer que l'application ϕ_k est linéaire, puis que le système $(\phi_1, \dots ,\phi_n)$ est libre dans l'espace $L(E,\mathbb{R})$.

Indication : Considérer les fonctions $\theta_k : x \mapsto x^k$. Calculer leurs dérivées successives en 0.

Ex 6 `Classique`

On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et la partie $F = \{f \in E ; f(0) = f(1) = 0\}$. Montrer que la partie F est un s.e.v. de E et trouver un supplémentaire de F dans E.

Indication : Considérer l'ensemble des fonctions telles que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$, $f(x) = 0$.

Ex 7 `Classique`

Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^n$ on considère

$$H = \{(x_1, \dots ,x_n) \in E \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$$

Montrer que H est un sev de E et trouver un supplémentaire de H. Le supplémentaire trouvé est-il unique ?

Indication : Faire un dessin de H lorsque $n = 2$ et $n = 3$.

Corrigé des exercices

$\boxed{Q\ 1}$

a.
- Soit $(x,y,z,t) \in F$. On a $t = y - x$ et $z = -2x$. On utilise (x,y) comme paramètres et donc $F \subset \{(x,y,-2x,y-x)\ ;\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$. On vérifie facilement l'inclusion réciproque. Par conséquent,

$$F = \{x.(1,0,-2,-1) + y.(0,1,0,1)\ ;\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \operatorname{Vect}\big((1,0,-2,-1),\ (0,1,0,1)\big)$$

  Donc F est un sev engendré par les vecteurs $f_1 = (1,0,-2,-1)$ et $f_2 = (0,1,0,1)$.
- On a

$$G = \{(\lambda+2\mu,\lambda,2\lambda+\mu,\mu)\ ;\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\} \subset \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x-y-t &= 0 \\ 2y-z+t &= 0 \end{cases}\}$$

  On vérifie facilement l'inclusion réciproque. On a donc trouvé un système d'équations de G. Comme $G = \operatorname{Vect}\big((1,1,2,0),(2,0,1,1)\big)$, G est un sev de E.

b.
- Montrons que $F \cap G = \{0_E\}$. Soit $X = (x,y,z,t) \in F \cap G$. Pour les calculs d'intersections, on a intérêt à choisir une représentation paramétrique et une représentation sous forme d'équations pour simplifier les calculs. Comme $X \in G$, il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $X = \lambda(1,1,2,0) + \mu(2,0,1,1) = (\lambda+2\mu,\lambda,2\lambda+\mu,\mu)$. Comme $X \in F$, ses coordonnées vérifient les équations de F et donc λ,μ vérifient le système de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} (\lambda+2\mu) - \lambda + \mu &= 0 \\ 2(\lambda+2\mu) + (2\lambda+\mu) &= 0 \end{cases}$$

  c'est à dire

$$\begin{cases} 3\mu &= 0 \\ 4\lambda + 5\mu &= 0 \end{cases}$$

  qui donne $\lambda = \mu = 0$. Par conséquent, $X = 0$. On a montré que la somme $F + G$ était directe.
- Montrons que $E = F + G$. Comme l'inclusion $F + G \subset E$ est claire, montrons l'autre inclusion. Soit $X = (x,y,z,t) \in E$.
  - **Analyse :** supposons qu'il existe $X_F \in F$ et $X_G \in G$ tels que $X = X_F + X_G$. Comme $X_G \in G$, il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $X_G = \lambda(1,1,2,0) + \mu(2,0,1,1)$. Mais alors $X_F = X - X_G = (x-\lambda-2\mu, y-\lambda, z-2\lambda-\mu, t-\mu)$. Puisque $X_F \in F$, ses composantes vérifient les équations de F et donc on doit avoir

$$\begin{cases} 3\mu &= x - y + t \\ 4\lambda + 5\mu &= 2x + z \end{cases}$$

    On résout ce système et on trouve (faire les calculs !) que

$$\begin{cases} \lambda &= \dfrac{x}{12} + \dfrac{5y}{12} + \dfrac{z}{4} - \dfrac{5t}{12} \\ \mu &= \dfrac{1}{3}(x - y + t) \end{cases}$$

    Finalement,

$$\begin{cases} X_G &= \dfrac{1}{12}(9x-3y+3z+3t, x+5y+3z-5t, 6x+6y+6z-6t, 4x-4y+4t) \\ X_F &= \dfrac{1}{12}(3x+3y-3z-3t, -x+7y-3z+5t, -6x-6y+6z+6t, -4x+4y+8t) \end{cases}$$

  - **Synthèse :** On pose X_F et X_G les vecteurs trouvés dans la partie analyse et on vérifie que
    - $X_F + X_G = X$
    - $X_F \in F$
    - $X_G \in G$.

  On a bien $E = F \oplus G$.

$\boxed{Q\ 2}$ Soit $x \in F$ et $y \in A$. Par l'absurde, si $x + y \notin A$, alors $x + y \in F$ et alors il existe $f \in F$ tel que $x + y = f$ mais alors $y = f - y \in F$ (car F est un sev).
Supposons que $F \neq E$. Par conséquent, il existe $y \in A$. Montrons alors que $E \subset \operatorname{Vect}(A)$. Soit $x \in E$. Si $x \in A$, alors $x \in \operatorname{Vect}(A)$. Supposons donc que $x \notin A$. Alors $x \in F$ et d'après a) , $x + y \in A$. On écrit alors

$$x = (x + y) - y$$

Et donc x est CL des vecteurs $(x+y)$,y qui appartiennent à A. Par conséquent, $x \in \text{Vect}(A)$.

$\boxed{Q\ 3}$ Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que

$$\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = 0_E$$

Alors

$$(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)a_1 + (\lambda_2 + \dots + \lambda_n)a_2 + \dots + (\lambda_{n-1} + \lambda_n)a_{n-1} + \lambda_n a_n = 0$$

Comme $(a_1,\dots,a_n)$ est libre, on tire que

$$\lambda_n = \lambda_n + \lambda_{n-1} = \dots = \lambda_n + \dots + \lambda_1 = 0_{\mathbb{K}}$$

et par conséquent que tous les λ_k sont nuls.

$\boxed{Q\ 4}$

a. Puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $e.e^{x+1} - e^{x+2} = 0$, on en déduit que (e^{x+1},e^{x+2}) est lié, donc le système est lié.

b. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, a(x-1)^2 + b(x-2)^2 + c(x-3)^2 = 0$$

alors puisque ce polynôme est nul, les coefficients de x^2,x,1 du polynôme et de ses dérivées doivent être nuls. On en tire

$$a + b + c = a + 2b + 3c = a + 4b + 9c = 0 \Rightarrow a = b = c = 0$$

Par conséquent, le système est libre.

c. Soient $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, a + bx + cx^2 + de^x = 0$$

On doit avoir $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$d + (a + bx + cx^2)e^{-x} = 0$$

et en passant à la limite lorsque $x \to +\infty$, on obtient que $d = 0$. En factorisant ensuite par x^2 et en faisant tendre x vers $+\infty$, on trouve que $c = 0$. Ensuite de même $b = 0$ et enfin $a = 0$. Le système est libre.

$\boxed{Q\ 5}$ Montrer que E est un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, puis montrer que les applications ϕ_k sont linéaires. Montrons ensuite que le système est libre. Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\lambda_1 \phi_1 + \dots + \lambda_n \phi_n = 0_{L(E,\mathbb{R})}$$

En appliquant cette application linéaire à la fonction $\theta_k : x \mapsto x^k \in E$, on trouve que

$$\lambda_k k! = 0$$

(car $[x^k]^{(p)}(0) = k!$ si $p = k$ et $[x^k]^{(p)}(0) = 0$ si $p \neq k$. On en déduit donc que $\forall k \in [\![1,n]\!], \lambda_k = 0$.

$\boxed{Q\ 6}$ On montre que la fonction nulle est dans F, et que F est stable par CL. Soit

$$G = \{f \in E ; \forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0, x \neq 1, f(x) = 0\}$$

On montre sans problème que G est un sev de E. Alors $\boxed{F \cap G = \{O_E\}}$ (c'est clair). Montrons ensuite que $E = F + G$: soit $f \in E$. Définissons

$$f_F = \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } 1 \\ f(x) & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right. \quad \text{et } f_G : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(0) & \text{si } x = 0 \\ f(1) & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$$

On a bien, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f_F(x) + f_G(x)$ et $f_F \in F$, $f_G \in G$. Finalement, $E = F \oplus G$.

$\boxed{Q\ 7}$ On montre sans problème que H est un sev. Considérons $a = (1,\dots,1) \in R^n$. Alors $a \notin H$. Montrons que $E = \text{Vect}(A) \oplus H$.

1. $\text{Vect}(a) \cap H = \emptyset$: Soit $x \in \text{Vect}(A) \cap H$: il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, tel que $x = \lambda a = (\lambda,\dots,\lambda)$. Mais comme $x \in H$, $n\lambda = 0$ d'où $\lambda = 0$ et $x = 0$.
2. Montrons que $E = \text{Vect}(a) + H$. Soit $x = (x_1,\dots,x_n) \in E$. En supposant le problème résolu, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $h \in H$ tels que $x = \lambda a + h$. Alors il faut que $x - \lambda a = (x_1 - \lambda,\dots,x_n - \lambda) \in H$ et donc que $\lambda = \dfrac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.

   Posons donc $\lambda = \dfrac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ et $h = x - \lambda a$. On vérifie que $x = \lambda a + h$ et que $h \in H$, $\lambda a \in \text{Vect}(a)$.

Le supplémentaire trouvé n'est pas unique (cf dessin dans $\mathbb{R}^3$): il suffit de prendre un vecteur $a \notin H$ et alors $E = \text{Vect}(a) \oplus H$.