Ex 1 — Facile

On considère un groupe $(G,.)$. Montrer que l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & x^{-1} \end{array} \right.$ est un isomorphisme de groupes si et seulement si le groupe G est commutatif.

Ex 2 — Facile

On considère deux groupes G et G' et une application $\phi : G \mapsto G'$. On définit l'ensemble

$$H = \{\big(x,\phi(x)\big);\ x \in G\}$$

Montrer l'équivalence

$$\underbrace{\big(\phi \text{ morphisme }\big)}_{(i)} \Longleftrightarrow \underbrace{\big(H \text{ sous-groupe de } G \times G'\big)}_{(ii)}$$

Ex 3 — Moyen, classique

Soit un ensemble E non-vide muni d'une lci $\star$ associative telle que :

$$\forall (a,b) \in E^2, \quad \exists (x,y) \in E^2 \text{ tq } b = a \star x = y \star a$$

Montrer que $(E,\star)$ est un groupe.

Indication : Pour trouver un élément neutre, considérer $a = b = a_1$, ce qui donne l'existence de $(e,f) \in E^2$ vérifiant la propriété de l'énoncé. Considérer ensuite $b \in E$, et montrer que $b \star e = b$, $f \star b = b$. Montrer ensuite que $e = f$.

Ex 4 — Difficile

Soit un groupe $(G,.)$ et deux sous-groupes H, K du groupe G.
On note

$$HK = \{x \in G \mid \exists h \in H, \exists k \in K,\ x = hk\}$$

a) Soit $x \in G$. Montrer que

$$x \in HK \Longleftrightarrow x^{-1} \in KH$$

b) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
(i) HK est un sous-groupe de G.
(ii) KH est un sous-groupe de G.
(iii) $HK = KH$.

Indication : Il faut bien comprendre la signification des notations. Par exemple, $HK = KH$ ne revient pas à dire que $\forall (h,k) \in H \times K,\ hk = kh$!

Ex 5 — Moyen

Soit un anneau $(A,+,\times)$. On dit qu'un élément $a \in A$ est *nilpotent* s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$.

1. Montrer que si a est nilpotent, alors $1 - a$ est inversible et calculer son inverse.
2. Soit un élément $a \in A$. On définit l'application $u : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \rightarrow & A \\ x & \rightarrow & u(x) = ax - xa \end{array} \right.$. Déterminer l'application $u^p = \underbrace{uo\dots ou}_{\text{p fois}}$.
3. Montrer que si a est nilpotent , il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que u^p soit l'application nulle.

Indication : Pour b, commencer par déterminer u^2, u^3, puis deviner la formule générale que l'on démontrera par récurrence.

Ex 6 — Moyen

Soit un anneau $(A,+,\times)$ et deux éléments a,b de A.

1. Si (ab) est un élément nilpotent, montrer que $1 - ab$ est inversible et déterminer $(1 - ab)^{-1}$.
2. Si (ab) et (ba) sont nilpotents, exprimer $(1 - ba)^{-1}$ en fonction de $(1 - ab)^{-1}$.
3. On ne suppose plus (ab) ni (ba) nilpotents. Montrer que si $1 - ab$ est inversible, alors $1 - ba$ est également inversible.

Corrigé des exercices

$\boxed{Q\ 1}$ L'application f est bijective quel que soit le groupe G (vérification immédiate).

1. Montrons que si G est commutatif, alors f est un morphisme. Soient deux éléments $(x,y) \in G^2$. Alors
$$f(xy) = (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1} = f(x)f(y)$$
2. Montrons que si l'application f est un morphisme de groupes, alors le groupe G est commutatif. Soient deux éléments $(x,y) \in G^2$. Puisque
$$f(x^{-1}y^{-1}) = f(x^{-1})f(y^{-1}) \Rightarrow (x^{-1}y^{-1})^{-1} = xy \Rightarrow (y^{-1})^{-1}(x^{-1})^{-1} = xy \Rightarrow yx = xy$$
et donc la loi est commutative.

$\boxed{Q\ 2}$

$(i) \Rightarrow (ii)$ Puisque ϕ est un morphisme, on sait que $\phi(e) = e'$. Donc $(e,e') = (e,\phi(e)) \in H$. Soient deux éléments X, Y de H. Il existe $(x,y) \in G^2$ tels que $X = (x,\phi(x))$ et $Y = (y,\phi(y))$. Alors
$$XY^{-1} = (x,\phi(x))(y,\phi(y))^{-1} = (xy^{-1},\phi(x)\phi(y)^{-1}) = (xy^{-1},\phi(xy^{-1})) \in H$$
On a utilisé la propriété d'un morphisme, $\phi(y^{-1}) = \phi(y)^{-1}$.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Soient $(x,y) \in G^2$, montrons que $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$. Puisque $(x,\phi(x)) \in H$ et que $(y,\phi(y)) \in H$, comme H est un sous-groupe de $G \times G'$, $(x,\phi(x))(y,\phi(y)) = (xy,\phi(x)\phi(y)) \in H$. Mais alors, par définition de H, il existe $z \in G$ tel que $xy = z$ et $\phi(z) = \phi(x)\phi(y)$. Cela donne $\phi(xy) = \phi(z) = \phi(x)\phi(y)$.

$\boxed{Q\ 3}$

1. On sait déjà que la lci est associative ;
2. Élément neutre : Soit un élément $a_1 \in E$. En prenant $b = a_1$, on sait qu'il existe $(e,f) \in E^2$ tels que $a_1 = a_1 \star e = f \star a_1$. Montrons que e est neutre. Soit $b \in E$. Il existe $(x,y) \in E^2$ tel que $b = a_1 \star x = y \star a_1$. Alors
$$b \star e = (y \star a_1) \star e = y \star (a_1 \star e) = y \star a_1 = b$$
$$f \star b = f \star (a_1 \star x) = (f \star a_1) \star x = a_1 \star x = b$$
On a donc montré que $\forall x \in E$, $x \star e = x$ et $f \star x = x$. En particulier, si $x = f$, $f \star e = f$ et si $x = e$, $f \star e = e$. On en déduit que $e = f$ et donc que $\forall x \in E$, $e \star x = x \star e = x$: e est l'élément neutre pour $\star$.
3. Soit un élément $X \in E$. Montrons que cet élément admet un symétrique : En prenant $b = e$ et $a = X$, il existe $(x,y) \in E^2$ tels que $e = X \star x = y \star X$. Il suffit de montrer que $x = y$. Écrivons
$$y = y \star e = y \star (X \star x) = (y \star X) \star x = e \star x = x$$
Donc $x = y$ est le symétrique de X.

$\boxed{Q\ 4}$ a) Soit un élément $x \in HK$, il existe deux éléments $(h,k) \in H \times K$ tels que $x = hk$. Alors $x^{-1} = k^{-1}h^{-1} \in KH$. Si $x^{-1} \in KH$, alors il existe $(k,h) \in K \times H$ tels que $x^{-1} = kh$ et donc $x = (x^{-1})^{-1} = h^{-1}k^{-1} \in HK$ (car H et K sont des sous-groupes et donc si $h \in H$, on a aussi $h^{-1} \in H$).

1. $(i) \Rightarrow (ii)$: Montrons que KH est un sous-groupe. Si e désigne l'élément neutre de G, alors puisque $e \in K$ et $e \in H$ (sous-groupes), par définition, $e = ee \in KH$. Soit $(x,y) \in (KH)^2$. Montrons que $xy^{-1} \in KH$. D'après a), il suffit de montrer que $(xy^{-1})^{-1} \in HK$. Or $(xy^{-1})^{-1} = yx^{-1}$ et puisque $y \in KH$, $y^{-1} \in HK$ et $x^{-1} \in HK$. Mais puisque HK est un groupe, $y = (y^{-1})^{-1} \in HK$ et aussi $yx^{-1} \in HK$.
2. $(ii) \Rightarrow (i)$ se démontre de même. (A faire !).
3. Montrons que $(ii) \Rightarrow (iii)$. Montrons que $HK \subset KH$: Soit $x \in HK$. $\exists(h,k) \in H \times K$ tel que $x = hk$. Mais puisque KH est un sous-groupe et qu'on a $(ii) \Rightarrow (i)$, on sait aussi que HK est un sous-groupe. Par conséquent, $x^{-1} \in HK$: $\exists(h',k') \in H \times K$ tels que $x^{-1} = h'k'$. Alors $x = (k')^{-1}(h')^{-1} \in KH$. On démontre de la même façon que $KH \subset HK$.
4. $(iii) \Rightarrow (i)$: On a bien $e = ee \in HK$. Soit $x \in HK$. D'après a), $x^{-1} \in KH$ et puisque $KH = HK$, il vient que $x^{-1} \in HK$. Soient $(x,y) \in (HK)^2$. Montrons que $xy \in HK$. Comme $x \in HK$, $\exists(h,k) \in H \times K$ tels que $x = hk$. De même, $\exists(h',k') \in H \times K$ tels que $y = h'k'$. Alors $xy = h(kh')k'$. Mais comme $kh' \in KH$ et que $KH = HK$, il vient que $kh' \in HK$. Donc $\exists(h'',k'') \in H \times K$ tels que $kh' = h''k''$. Alors $xy = hh''k''k$. Mais puisque H et K sont des sous-groupes, $hh'' \in H$ et $k''k \in K$ et donc $xy = hh''k''k \in HK$.

$\boxed{Q\ 5}$ Montrer par récurrence que

$$\forall x \in A, \quad u^p(x) = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} (-1)^k a^{p-k} x a^k$$

Si l'on choisit alors $p \geq 2n - 1$, pour $k \geq n$, $a^{p-k} x a^k = 0$, et si $k \leq n - 1$, alors $p - k \geq p - n + 1 \geq n$ et alors on a également $a^{p-k} x a^k = 0$. Finalement, tous les termes de la somme sont nuls, et ceci quel que soit $x \in A$. Donc $u^p = 0$.

$\boxed{Q\ 6}$

1. $(1 - ab)^{-1} = 1 + ab + abab + \cdots + abab \ldots ab$;
2. $(1 - ba)^{-1} = 1 + ba + baba + \cdots + baba \ldots ba$. Si $(ab)^n = 0$ et $(ba)^p = 0$, on peut écrire les formules précédentes pour $\max(n,p)$. Ecrivons alors

$$(1 - ba)^{-1} = 1 + b(1 + ab + abab + \cdots + abab \ldots ab)a = 1 + b(1 - ab)^{-1} a$$

3. Posons $c = (1 - ab)^{-1}$. Montrons que $(1 - ba)$ est inversible et que $\boxed{(1 - ba)^{-1} = 1 + bca}$. Pour cela, calculons

$$(1 - ba)(1 + bca) = 1 - ba + bca - babca = 1 + b[-1 + (1 - ab)c]a = 1 + b \times 0 \times a = 1$$

$$(1 + bca)(1 - ba) = 1 - ba + bca - bcaba = 1 + b[-1 + c(1 - ab)]a = 1$$