Ex 1 `Facile`

Soit une fonction $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{Z}$. Montrez qu'il existe une suite d'entiers relatifs (α_k) telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \binom{n}{k}$$

Ex 2 `Moyen`

On considère deux ensembles finis E de cardinal n et F de cardinal p avec $p < n$ et une application $f : E \mapsto F$.

a. Pour un élément $a \in F$, on note $E_a = f^{-1}(\{a\})$ l'ensemble de ses antécédants. Montrer que la famille $(E_a)_{a\in F}$ est un partage de E.

b. Montrer qu'il existe un élément $a \in F$ tel que $\left|E_a\right| \geq \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil$ où $\lceil x \rceil$ représente la partie entière supérieure du réel x : le plus petit entier $k \in \mathbb{Z}$ vérifiant $x \leq k$.

c. En déduire le principe des tiroirs : si l'on place n chaussettes dans p tiroirs, avec $p < n$, alors un tiroir contient au moins 2 chaussettes.

d. On considère un entier $n \geq 1$ et une partie $A \subset [\![1,2n]\!]$ telle que $|A| = n + 1$. Montrer qu'il existe deux entiers $(a,b) \in A^2$ tels que a divise b.

Ex 3 `Facile`

Calculez pour $(p,q) \in \mathbb{N}^2$:

$$S = \sum_{k=0}^{p} \binom{p+q}{k} \binom{p+q-k}{p-k}$$

Ex 4 `Facile`

Soit un ensemble fini E de cardinal $n > 0$. Calculer la somme

$$\sum_{X\in\mathcal{P}(E)} |X|$$

Ex 5 `Facile`

Dénombrez les parties à $p+1$ éléments de l'intervalle entier $[\![1,n+1]\!]$ dont le plus grand élément est $k+1$. En déduire la valeur de la somme :

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$$

Redémontrez la formule précédente par récurrence.

Ex 6 `Moyen`

Déterminez le nombre de surjections de l'intervalle d'entiers $[\![1,n+1]\!]$ vers l'intervalle d'entiers $[\![1,n]\!]$.

Ex 7 `Moyen`

Soient deux entiers $1 \leq p \leq n$. Déterminez le nombre d'applications de $[\![1,n]\!]$ vers $[\![1,p]\!]$ telles que $f(1) = 1$ et

$$\forall i \in [\![1,n-1]\!], \quad f(i) \leq f(i+1) \leq f(i)+1$$

Ex 8 `Moyen`

Montrer que $\forall n \geq 0$, $\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2$ tels que $0 \leq j+k \leq n$,

$$\binom{n}{j+k} \leq \binom{n}{j} \binom{n-j}{k}$$

On donnera une démonstration par le calcul et une démonstration combinatoire.

Corrigé des exercices

$\boxed{Q\ 1}$ Par récurrence sur n :

$$\mathcal{P}(n) : \exists(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \text{ tq } \forall i \in [\![0,n]\!],\ \sum_{k=0}^{i} \alpha_k \binom{i}{k} = f(i)$$

$\mathcal{P}(0)$: Il suffit de poser $\alpha_0 = f(0)$.
$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$: d'après $\mathcal{P}(n)$, il existe $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ vérifiant l'hypothèse. Définissons α_{n+1} par

$$\alpha_{n+1} = f(n+1) - \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \binom{n+1}{k}$$

On a bien $\forall i \in [\![0,n+1]\!]$, $f(i) = \sum_{k=0}^{i} \alpha_k \binom{i}{k}$.

$\boxed{Q\ 2}$

a. – Montrons que $E = \bigcup_{a\in F} E_a$.
   – $\supset$ est claire puisque par définition $E_a \subset E$.
   – $\subset$: soit $x \in E$, posons $a = f(x)$. On a bien $f(x) \in \{a\}$ et donc $x \in E_a$.
 – Soient $(a,b) \in F^2$ tels que $a \neq b$. Montrons que $E_a \cap E_b = \emptyset$. Par l'absurde, s'il existait $x \in E_a \cap E_b$, on aurait $f(x) \in \{a\}$ et $f(x) \in \{b\}$ et donc $f(x) = a = b$ ce qui est faux.

b. Par l'absurde, si $\forall a \in F$, $\left|E_a\right| < \left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil$, on aurait $\forall a \in F$, $\left|E_a\right| < \frac{n}{p}$ (puisque $\left|E_a\right|$ est un entier). Mais alors d'après le lemme des bergers,

$$|E| = \sum_{a\in F} \left|E_a\right| < |F| \times \frac{n}{p} = n$$

une absurdité.

c. Numérotons les chaussettes $1, \ldots, n$ et les tiroirs $1, \ldots, p$. À une répartition des chaussettes dans les tiroirs, on associe la fonction $f : [\![1,n]\!] \mapsto [\![1,p]\!]$ définie par $f(i) = k$ si la chausette i est placée dans le tiroir k. Comme $n > p$, $\left\lceil \frac{n}{p} \right\rceil \geq 2$ et d'après la question précédente, il existe un tiroir a qui contient au moins 2 chaussettes.

d. Écrivons tous les entiers de $A = \{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ sous la forme $a_k = 2^{\alpha_k} \times m_k$ où m_k est un entier impair et $\alpha_k \in \mathbb{N}$. On a $1 \leq m_k \leq 2n$ et comme il y a n entiers impairs dans l'intervalle $[\![1,2n]\!]$, il doit exister $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tels que $m = m_i = m_j$ d'après le principe des tiroirs. Alors si $\alpha_i < \alpha_j$, on a $a_i = 2^{\alpha_i} \times m$ qui divise $a_j = 2^{\alpha_j} \times m$.

$\boxed{Q\ 3}$ On trouve en écrivant les coefficients binômiaux à l'aide de factorielles :

$$\binom{p+q}{k}\binom{p+q-k}{p-k} = \frac{(p+q)!}{(p-k)!q!k!} = \frac{(p+q)!}{p!q!}\binom{p}{k}$$

Donc

$$S = \binom{p+q}{p} \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} = \boxed{\binom{p+q}{p} 2^p}$$

$\boxed{Q\ 4}$ Il y a $\binom{n}{k}$ parties $X \subset E$ de cardinal k. La somme cherchée vaut donc

$$S = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{p=0}^{n-1}\binom{n-1}{p} = \boxed{n2^{n-1}}$$

$\boxed{Q\ 5}$ Le plus grand élément étant fixé, il suffit de choisir p éléments dans l'intervalle $[\![1,k]\!]$. Il y a pour cela $\binom{k}{p}$ possibilités. Si l'on considère une partie X quelconque de l'intervalle $[\![1,n+1]\!]$, à $p+1$ éléments, son plus grand élément k est compris entre $p+1$ et $n+1$. On peut alors faire un partage des parties à $p+1$ éléments en classes

$C_{p+1}, \dots C_n$ disjointes, où C_k désigne l'ensemble des parties de $[\![1,n+1]\!]$ dont le plus grand élément vaut k. Donc d'après le lemme des bergers, le cardinal de l'ensemble des parties à $p+1$ éléments vaut :

$$|C_{p+1}| + \cdots + |C_{n+1}|$$

Mais on sait également qu'il y a $\binom{n+1}{p+1}$ parties à $p+1$ éléments dans $[\![1,n+1]\!]$. Par conséquent :

$$\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p}$$

$\boxed{Q\ 6}$ Soit une surjection $f : [\![1,n+1]\!] \mapsto [\![1,n]\!]$. Exactement deux éléments n_1 et n_2 doivent avoir la même image k par f. Il y a $\binom{n+1}{2}$ choix possibles pour ces deux éléments, et n choix possibles pour k. Ensuite, la restriction de f de $[\![1,n+1]\!] \setminus \{n_1,n_2\} \mapsto [\![1,n]\!] \setminus \{k\}$ est une bijection et il y en a $(n-1)!$. Le nombre total de surjections est donc $\binom{n+1}{2} n(n-1)! = \boxed{\dfrac{n(n+1)!}{2}}$

$\boxed{Q\ 7}$ Dénombrons d'abord le nombre de telles applications avec $f(n) = k \in [\![1,p]\!]$. Puisque $f(n) \leq n$, il faut que $k \leq n$ pour qu'il en existe une. Une telle application est entièrement déterminée en se donnant les entiers $i \in [\![1,n-1]\!]$ tels que $f(i) < f(i+1)$. Comme $f(n) = k$, il y a exactement $k-1$ « sauts ». Donc il y a $\binom{n-1}{k-1}$ telles applications. Le nombre cherché vaut donc : $\sum_{k=1}^{p} \binom{n-1}{k-1}$. Remarquons que si $p = n$, il y a $2^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1}$ telles applications.

$\boxed{Q\ 8}$ a) Par le calcul, il suffit de démontrer que $j!k! \leq (j+k)!$, ce qui est vrai, car $(j+1)(j+2)\dots(j+k) \geq 1 \times 2 \times \cdots \times k$.
b) Une démonstration combinatoire. Soit A une partie de cardinal $j+k$ de $[\![1,n]\!]$. On lui associe le couple (A_1,A_2) de parties suivantes. A_1 est la partie formée des j plus petits éléments de A. Alors $[\![1,n]\!] \setminus A_1 \subset [\![n-j+1,n]\!]$ et on considère la partie A_2 formée des j derniers éléments de A. La partie A_2 est un sous-ensemble de $[\![n-j+1,n]\!]$ qui est un ensemble à $n-j$ éléments. On peut donc définir l'application

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} P_{n,j+k} & \longrightarrow & P_{n,j} \times P_{n-j,k} \\ A & \mapsto & (A_1,A_2) \end{array} \right.$$

où $P_{n,j+k}$ désigne l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$ de cardinal $j+k$, $P_{n,j}$ l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$ de cardinal j et $P_{n-j,k}$ l'ensemble des parties de $[|n-j+1,n|]$ de cardinal k.
Cette application ϕ est injective, par construction de (A_1,A_2) et donc $|P_{n,j+k}| \leq |P_{n,j}||P_{n-j,k}|$ d'où l'inégalité souhaitée.