Ex 1 `Moyen`

On considère un méridien terrestre et l'on suppose que la température au sol varie continument sur ce méridien. Montrez l'existence de deux points antipodaux sur ce méridien où la température est la même.

Ex 2 `Moyen`

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue et croissante. On suppose qu'il existe un réel $a > 0$ tel que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \geq a|x - y|$$

Montrer que la fonction f est bijective.

Ex 3 `Facile`

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. On dit que cette fonction possède une dérivée symétrique en 0 lorsque

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(-h)}{2h} \text{ existe et est finie.}$$

a) Si la fonction f est dérivable en 0, montrer qu'elle admet une dérivée symétrique en 0 et la calculer.
b) Si la fonction f admet une dérivée symétrique en 0, est-elle dérivable en 0 ?

Ex 4 `Moyen`

Soit une fonction $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 0$, $f \geq 0$ et

$$\forall x \geq 0, f'(x) \leq a f(x) \quad (a > 0)$$

Montrer que la fonction f est nulle.

Ex 5 `Moyen`

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que si

$$f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

alors

$$f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$$

La réciproque est-elle vraie ?

Ex 6 `Facile`

Soit une fonction $f :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $k > 0$ et $\alpha > 1$ tels que $\forall (x,y) \in]0,1[^2$,

$$\left| f(x) - f(y) \right| \leq k|x - y|^\alpha$$

Montrer que la fonction f est constante.

Ex 7 `Moyen`

Soit une fonction $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $[0,1]$. On suppose que $f(0) = 0$ et que $f(1)f'(1) < 0$. Montrer qu'il existe $c \in]0,1[$ tel que $f'(c) = 0$.

Indication : Faire un dessin, et s'inspirer de la démonstration de Rolle.

Ex 8 `Facile`

Calculer la dérivée nième de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$. On pourra décomposer cette fraction en somme de deux fractions plus simples à dériver.

Ex 9 `Facile`

Déterminer la dérivée nième de la fonction définie par

$$f(x) = x^2 (1 - x)^n$$

Indication : Ecrire $(1 - x)^n = (-1)^n (x - 1)^n$ pour calculer les dérivées successives.
Cela évite les erreurs de signe !

Ex 10 `Moyen`

On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^3$ sur le segment $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + \frac{b - a}{2}\left[f'(a) + f'(b)\right] - \frac{(b - a)^3}{12} f^{(3)}(c)$$

Ex 11 **Moyen**

On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0,1]$ vérifiant $f(1) - f(0) = 1$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, il existe des réels $(x_1, \dots, x_n) \in [0,1]^n$ distincts tels que

$$\sum_{i=1}^{n} f'(x_i) = n$$

Ex 12 **Moyen**

On considère la fonction :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} e^{1/(x^2-1)} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

Étudiez la continuité et la dérivabilité de cette fonction. Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Ex 13 **Moyen**

On considère un réel $M > 0$ et une fonction $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ \left|g'(x)\right| \leq M$. Soit un réel $\varepsilon > 0$. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + \varepsilon g$.

1. Trouver une condition suffisante sur ε pour que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0$.
2. Montrez que si cette condition est remplie, la fonction f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

Ex 14 **Facile**

Soit une fonction $f :]0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ dérivable sur $]0, +\infty[$.

1. On suppose que $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} l > 0$. Que peut-on dire de la limite de f en $+\infty$?
2. On suppose que $xf'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$. Que peut-on dire de la limite de f en $+\infty$?
3. On suppose que $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. Que peut-on dire de la limite de f en $+\infty$?
4. On suppose que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$. Que peut-on dire de la limite de f' en $+\infty$?

Ex 15 **Moyen**

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que :

$$(1)\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad f \circ f(x) = \frac{x}{2} + 3$$

a. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f\Big(\frac{x}{2} + 3\Big) = \frac{f(x)}{2} + 3$$

1. Montrer que la fonction f' est constante.
2. Trouver les fonctions f vérifiant la relation (1).

1 Calculs de dérivées

Pour améliorer sa technique calculatoire, quelques cadeaux de fin d'année ! Les solutions ne sont pas détaillées... Dans chacun des exercices qui suivent, déterminer les intervalles sur lesquels la fonction est dérivable et calculer (en simplifiant et en factorisant le résultat) sa dérivée.

Ex 16 **Facile**

$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Ex 17 **Facile**

$f(x) = \ln(\sqrt{2 \sin x + 1} + \sqrt{2 \sin x - 1})$.

Ex 18 **Facile**

$f(x) = \arctan \dfrac{\ln x}{3}$

Ex 19 Facile

$f(x) = e^x \arctan(e^x) - \ln\left(\sqrt{1+e^{2x}}\right)$.

Ex 20 Facile

Pour $k \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+k} + \dfrac{k}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+k}\right)$.

Ex 21 Facile

$f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} + \ln\left(\dfrac{1+\sin x}{\cos x}\right)$.

Ex 22 Facile

$f(x) = \arcsin \dfrac{2x^2}{1+x^4}$.

Ex 23 Facile

$f(x) = x^{(x^2)}$.

Ex 24 Facile

$f(x) = \ln\left(\tan \dfrac{x}{2}\right) - \dfrac{x}{\sin x}$.

Ex 25 Facile

$f(x) = \dfrac{\arctan x}{x} - \ln \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Ex 26 Facile

$f(x) = \dfrac{1}{4a}\ln\dfrac{x-a}{x+a} + \dfrac{1}{2a}\arctan\dfrac{x}{a}$

Ex 27 Facile

$f(x) = \arctan \dfrac{3x - x^3}{1-3x^2}$

Ex 28 Facile

$f(x) = \ln \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{1+x^2}+1}$.

Ex 29 Facile

$f(x) = \ln \dfrac{\sqrt{x^4+1}-x^2}{\sqrt{x^4+1}+x^2}$

Ex 30 Facile

$f(x) = \sqrt{x}\arcsin(\sqrt{x}) + \sqrt{1-x}$.

Ex 31 Facile

$f(x) = \arcsin\left(\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}\right)$.

Ex 32 Facile

$f(x) = \arctan\left(\dfrac{x^x - x^{-x}}{2}\right)$.

Ex 33 Facile

$f(x) = \dfrac{x^x}{e^x}(x\ln x - x - 1)$.

Ex 34 Facile

$f(x) = \log_{e^2}(x^n + \sqrt{x^{2n}+1})$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Ex 35 Facile

$f(x) = \ln\left[\ln x(\ln\ln\ln x - 1)\right]$

Corrigé des exercices

$\boxed{Q\ 1}$ À chaque point du méridien, on associe l'angle θ entre le pôle nord et ce point. Considérons la fonction $f : [0,2\pi] \mapsto \mathbb{R}$ où $f(\theta)$ représente la température au point d'angle θ. Par hypothèse, cette fonction est continue et $f(0) = f(2\pi) = T$ où T est la température au pôle nord. Considérons la fonction définie sur $[0,\pi]$ par $g(\theta) = f(\theta + \pi) - f(\theta)$. Comme g est continue et que $g(0) = f(\pi) - f(0) = f(\pi) - f(2\pi) = -g(\pi)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\alpha \in]0,\pi[$ tel que $g(\alpha) = 0$, c'est à dire $f(\alpha + \pi) = f(\alpha)$.

$\boxed{Q\ 2}$

1. Montrons que f est injective : soient deux réels $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) = f(y)$. Alors
$$|x - y| \leq \frac{1}{a}\big|f(x) - f(y)\big| \leq 0$$
et donc $x = y$.
2. Montrons que la fonction f n'est pas majorée. Par l'absurde, f tendrait alors vers une limite finie l lorsque $x \to +\infty$. Mais alors, $\exists c > 0$ tel que $\forall x \geq c$, $l - 1 \leq f(x) \leq l$. On aurait alors $\forall x \geq c$,
$$\big|f(x) - f(c)\big| \geq a|x - c| \Rightarrow |x - c| \leq \frac{1}{a}\big|f(x) - f(c)\big| \leq \frac{1}{a}$$
ce qui est impossible car pour x grand, $|x - c| > \dfrac{1}{a}$. On montre de même que f n'est pas minorée.
3. Par conséquent, la fonction f est surjective. En effet, Soit $t \in \mathbb{R}$. Comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(a) \leq t \leq f(b)$. Mais alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\exists c \in [a,b]$ tel que $f(c) = t$.

$\boxed{Q\ 3}$ Utilisons le DL à l'ordre 1 de f :
$$f(x) = f(0) + xf'(0) + x\varepsilon(x)$$
avec $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to0]{} 0$. Soit $h > 0$. En écrivant cette égalité pour $x = h$ et pour $x = -h$, en soustrayant et en divisant par $2h$, on trouve que
$$\frac{f(h) - f(-h)}{2h} = f'(0) + \varepsilon(h) + \varepsilon(-h) \xrightarrow[h\to0]{} f'(0)$$
Donc la fonction f admet une dérivée symétrique en 0 qui vaut $f'(0)$.

La réciproque est fausse comme on le voit si $f(x) = |x|$: $\forall h \neq 0$, $\dfrac{f(h) - f(-h)}{2h} = 0$ donc f admet une dérivée symétrique en 0 mais n'est pas dérivable en 0 car $f'_g(0) = -1$ et $f'_d(0) = 1$.

$\boxed{Q\ 4}$ Introduisons la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par $g(x) = e^{ax}f(x)$. Elle est dérivable et $\forall x \geq 0$, $g'(x) = e^{-ax}(f'(x) - af(x)) \leq 0$. Donc $\forall x \geq 0$, $g(x) \leq g(0)$ et alors $f(x) = e^{ax}g(x) \leq e^{ax}g(0) \leq e^{ax}f(0) \leq 0$. Comme la fonction f est positive, c'est la fonction nulle.

$\boxed{Q\ 5}$ Puisque $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, il existe $A > 0$ tel que $\forall x \geq A$, $f'(x) \geq 1$. Soit alors $x \geq A$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]A,x[$ tel que $f(x) - f(A) = f'(c)(x - A)$. Par conséquent, $f(x) \geq f(A) + x - A$ et d'après le théorème des gendarmes, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

La réciproque est bien entendu fausse, comme on le voit sur la fonction définie par $f(x) = \ln x$.

$\boxed{Q\ 6}$ Soit $x \in \mathbb{R}$, et $y \neq x$. On a $\left|\dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| \leq k|y - x|^{\alpha-1}$ et comme $\alpha - 1 > 0$, $\alpha(y) = |y - x|^{\alpha-1} \xrightarrow[y\to x]{} 0$. D'après le théorème de majoration, on en déduit que le taux d'accroissement tend vers 0 lorsque $y \to x$. On a donc montré que la fonction f est dérivable au point x et que $f'(x) = 0$. La fonction f est donc constante sur l'intervalle $]0,1[$.

$\boxed{Q\ 7}$ f est continue sur le segment $[0,1]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes. Supposons par exemple que $f(1) > 0$ et $f'(1) < 0$. Soit $M = f(c)$ le maximum de f sur $[0,1]$. Montrons que c est un point *intérieur* de $[0,1]$. On a $c \neq 0$ car $f(1) > 0$. Si on suppose que $c = 1$, alors $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \leq f(1)$ mais alors $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} \geq 0$ et en passant à la limite dans les inégalités lorsque $x \to 1$, on aurait $f'(1) \geq 0$, ce qui est faux. Par conséquent, $c \in]0,1[$ et alors puisque f est dérivable au point c qui est un extrémum local *intérieur*, $f'(c) = 0$.

$\boxed{Q\ 8}$ Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$. On écrit $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}\right)$. Les dérivées nièmes de ces deux fonctions sont simples à exprimer :
$$\left(\frac{1}{x+a}\right)^{k} = \frac{(-1)^k}{(x+a)^{k+1}}$$

et on trouve alors que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\},\ f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right)$$

$\boxed{Q\ 9}$ Utilisons la formule de Leibniz. Soit $x \in \mathbb{R}$:

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left[x^2\right]^{(k)} \left[(1-x)^n\right]^{(n-k)}$$

Puisque les dérivées de x^2 sont nulles pour $k \geq 3$, il ne reste que 3 termes dans cette somme :

$$f^{(n)}(x) = x^2[(1-x)^n]^{(n)} + 2nx[(1-x)^n]^{(n-1)} + n(n-1)[(1-x)^n]^{(n-2)}$$

Ensuite, en remarquant que $(1-x)^n = (-1)^n(x-1)^n$, on calcule les dérivées de $(x-1)^n$:

$$[(x-1)^n]^{(p)} = \frac{n!}{(n-p)!}(x-1)^{n-p}$$

et alors :

$$f^{(n)}(x) = n!x^2(-1)^n + 2nx(-1)^n n!(x-1) + n(n-1)(-1)^n\frac{n!}{2}(x-1)^2$$

et après factorisation et simplification, on trouve que

$$f^{(n)}(x) = \boxed{(-1)^n\frac{n!}{2}\left[(n+1)(n+2)x^2 - 2n(n+1)x + n(n-1)\right]}$$

On remarque que la fonction f étant polynômiale de degré $(n+2)$, sa dérivée nième est bien un polynôme de degré 2.

$\boxed{Q\ 10}$ Considérons la fonction auxiliaire :

$$\phi : \begin{cases} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(t) - f(a) - \dfrac{t-a}{2}\big[f'(a) + f'(t)\big] + \dfrac{(t-a)^3}{12}K \end{cases}$$

où nous allons choisir convenablement la constante K. On a $\phi(a) = 0$ et

$$\phi(b) = f(b) - f(a) - \frac{b-a}{2}\big[f'(b) + f'(a)\big] + \frac{(b-a)^3}{12}K$$

On peut donc choisir K tel que $\phi(b) = 0$ puisque $a \neq b$. En appliquant Rolle à la fonction ϕ entre a et b, il existe $c_1 \in]a,b[$ tel que $\phi'(c_1) = 0$. Mais on calcule pour $t \in [a,b]$,

$$\phi'(t) = \frac{f'(t) - f'(a)}{2} - \frac{t-a}{2}f''(t) + \frac{(t-a)^2}{4}K$$

Puisque $\phi'(a) = \phi'(c_1) = 0$, d'après Rolle, il existe $c \in]a,c_1[$ tel que $\phi''(c) = 0$. Mais on calcule pour $t \in]a,c_1[$,

$$\phi''(t) = \frac{t-a}{2}\big(K - f^{(3)}(t)\big)$$

Par conséquent, $K = f^{(3)}(c)$. En reportant cette valeur de K dans la formule $\phi(b) = 0$ on trouve le résultat souhaité.

$\boxed{Q\ 11}$ Soit $n \geq 1$ et $i \in [\![0,n-1]\!]$. En appliquant le théorème des accroissements finis entre $\dfrac{i}{n}$ et $\dfrac{i+1}{n}$, on montre l'existence d'un $x_i \in]\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}[$ tel que

$$f\Big(\frac{i+1}{n}\Big) - f\Big(\frac{i}{n}\Big) = \frac{f'(x_i)}{n}$$

En additionnant ces égalités, on trouve le résultat.

$\boxed{Q\ 12}$

1. Continuité de f : soit $x_0 \in \mathbb{R}$.
   - Si $x_0 \neq 1$ et $x_0 \neq -1$, la fonction f est continue au point x_0 comme composée de fonctions continues.

- Si $x_0 = 1$, $f(x) \xrightarrow[x\to 1^{1+}]{} 0$. Lorsque $x \to 1^-$, $f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0$ (composée de limites). Donc $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} 0 = f(1)$. La fonction f est continue au point 1.
- Si $x_0 = -1$, comme la fonction f est paire, on se ramène à l'étude précédente.

2. Dérivabilité de f : soit $x_0 \in \mathbb{R}$
   - Si $x_0 \neq 1, -1$, il est clair que f est dérivable au point x_0.
   - Si $x_0 = 1$, la fonction f étant dérivable sur l'intervalle $]1, +\infty[$ de dérivée nulle, $f'(x) \xrightarrow[x\to 1^+]{} 0$. Donc d'après le théorème de prolongement dérivable, la fonction f est dérivable à droite au point 1 et $f'_d(1) = 0$. Calculons pour $x \in]0,1[$

   $$f'(x) = e^{1/(x^2-1)} \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

   Lorsque $x \to 1^-$, $f'(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0$. D'après le théorème du prolongement dérivable, la fonction f est dérivable à gauche au point 1 et $f'_g(1) = 0$. Comme $f'_d(1) = f'_g(1) = 0$, il vient que la fonction f est dérivable au point 1 et que $f'(1) = 0$.
   - Par parité on en déduit que f est également dérivable au point $x_0 = -1$.
3. On a vu que $f'(x) \xrightarrow[x\to 1]{} f'(1) = 0$ et donc la fonction f' est continue au point 1 (-1). Comme elle continue en tous les autres points, on en déduit que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

$\boxed{Q\ 13}$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On calcule $f'(x) = 1 + \varepsilon g'(x) \geq 1 - \varepsilon M$. Par conséquent, si $M < 1/\varepsilon$, on est assuré que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) > 0$.
2. Dans ce cas, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $J = f(\mathbb{R})$. Montrons que $J = \mathbb{R}$. Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) \geq 1 - \varepsilon M$, en notant $k = 1 - \varepsilon M > 0$, on a $[f - kx]' > 0$ et donc la fonction $x \mapsto f(x) - kx$ est croissante sur $\mathbb{R}$. En particulier, pour $x \geq 0$, on a $f(x) \geq f(0) + kx$. Or $f(0) + kx \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$ et d'après le théorème de majoration, on en déduit que $f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$.

   De même, puisque $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) \leq 1 + \varepsilon M$, en notant $k' = 1 + \varepsilon M > 0$, on trouve que $\forall x \leq 0$, $f(x) \leq f(0) + k'x$. Mais puisque $f(0) + k'x \xrightarrow[x\to -\infty]{} -\infty$, il vient que $f(x) \xrightarrow[x\to -\infty]{} -\infty$. Donc $J =]-\infty, +\infty[$.

$\boxed{Q\ 14}$

1. Montrons que $f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$. Puisque $0 < l/2 < l$, il existe $A > 0$ tel que $\forall x \geq A,\ f'(x) \geq l/2$. Soit alors $x \geq A$. D'après le TAF, il existe $c \in]A,x[$ tel que $f(x) - f(A) = (x-A)f'(c)$. Mais alors on minore f :

   $$f(x) \geq (x-A)\frac{l}{2} + f(A) \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$$

   D'après le théorème des gendarmes, $f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$.
2. Montrons que $f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$. Puisque $1/2 < 1$, et que $xf'(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} 1$, il existe $A > 0$ tel que $f'(x) \geq \dfrac{1}{2x}$. Soit $x \geq A$. « Primitivons » cette inégalité entre A et x : La fonction définie par $g(x) = f(x) - \dfrac{1}{2}\ln x$ est dérivable sur $[A, +\infty[$ et vérifie $\forall x \geq A,\ g'(x) \geq 0$. Elle est donc croissante et par conséquent $g(x) \geq g(A)$ ce qui donne

   $$f(x) \geq f(A) + \frac{1}{2}\big(\ln(x) - \ln(A)\big) \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$$

   Par le théorème des gendarmes, $f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} +\infty$.
3. En général on ne peut rien dire. Par exemple si $f(x) = \ln(x)$, $f'(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$ et $f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$. Pour une fonction constante, la limite est constante et pour la fonction $x \mapsto 1/x$, la limite vaut $0 \ldots$
4. On pourrait croire que $f'(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$ mais c'est faux. Il suffit de construire une fonction qui oscille très vite en tendant vers 0. Par exemple,

   $$f(x) = \frac{1}{x}\sin(x^2)$$

   Alors f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0$,

   $$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\sin(x^2) + 2\cos(x^2)$$

   qui n'a pas de limite en $+\infty$ (on le montre en utilisant les suites $(2n\pi)$ et $\big((2n+1)\pi/2\big)$).

$\boxed{Q\ 15}$ a) Soit $x \in \mathbb{R}$. En appliquant f à (1), on trouve que

$$f\big(f \circ f(x)\big) = f\Big(\frac{x}{2} + 3\Big)\big)$$

et comme $f \circ (f \circ f) = (f \circ f) \circ f$, en utilisant l'expression de $f \circ f$ de (1), on obtient que

$$\frac{f(x)}{2} + 3 = f\Big(\frac{x}{2} + 3\Big)$$

b) En dérivant l'égalité précédente, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{f'(x)}{2} = \frac{1}{2} f'\Big(\frac{x}{2} + 3\Big)$$

En définissant la suite (u_n) par $u_0 = x$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 3$$

on voit que c'est une suite arithmético-géométrique et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 6 + \frac{1}{2^n}(x - 6) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 6$$

Comme f' est continue au point 6, on obtient que $f'(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} f'(6)$ et que finalement $f'(x) = f'(6)$. Par conséquent, f' est constante.
c) Comme f' est constante, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b$$

Cherchons les réels a,b tels que f vérifie (1). Après calculs, on trouve $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}, b = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$ ou alors $a = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}, b = \dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

$\boxed{Q\ 16}$ Pour $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x|$. Par conséquent, $x + \sqrt{x^2+1} > |x| + x \geq 0$. La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on trouve (c'est la fonction argsh) :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \geq 0$$

$\boxed{Q\ 17}$ Il faut que $2\sin x > 1/2$, c'est à dire $x \in \cup_{k \in \mathbb{Z}}]2k\pi + \pi/3, 2k\pi + 2\pi/3[$. On trouve ensuite

$$f'(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{(2\sin x - 1)(2\sin x + 1)}} \geq 0$$

$\boxed{Q\ 18}$ f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{3}{x(9 + \ln^2 x)} > 0$$

$\boxed{Q\ 19}$ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = e^x \arctan e^x > 0$$

$\boxed{Q\ 20}$ Il faut que $x^2 > -k$. Donc si $k > 0$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et si $k > 0$, f est dérivable sur $I = \mathbb{R}$ et si $k \leq 0$, f est dérivable sur $]\sqrt{-k}, +\infty[$. On calcule

$$f'(x) = \sqrt{x^2 + k}$$

$\boxed{Q\ 21}$ Il faut que $\cos x > 0$ et $\sin x > -1$, c'est à dire $x \in \cup_{k \in \mathbb{Z}}]2k\pi - \pi/2, 2k\pi + \pi/2[$. On trouve que

$$f'(x) = \frac{2}{\cos^2 x} > 0$$

$\boxed{Q\ 22}$ arcsin est dérivable sur $]-1{,}1[$. Puisque $x^2 \leq \dfrac{1+x^4}{2}$, $\dfrac{2x^2}{1+x^4} \leq 1$ et la fonction est définie sur $\mathbb{R}$. On a $\dfrac{2x^2}{1+x^4} = 1$ si et seulement si $x = \pm 1$ et donc f est dérivable sur $I_1 =]-\infty, -1[$, $I_2 =]-1{,}1[$ et $I_3 =]1, +\infty[$.
On calcule

$$f'(x) = \frac{4x(1-x^4)}{|1-x^4|(1+x^4)} = \begin{cases} \dfrac{4x}{1+x^4} & \text{si } x \in I_2 \\ -\dfrac{4x}{1+x^4} & \text{si } x \in I_1 \cup I_3 \end{cases}$$

$\boxed{Q\ 23}$ f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$f'(x) = x^{x^2+1}(1 + 2\ln x)$$

$\boxed{Q\ 24}$

$$f'(x) = \frac{x\cos x}{\sin^2 x}$$

$\boxed{Q\ 25}$

$$f'(x) = -\frac{\arctan x}{x^2}$$

$\boxed{Q\ 26}$

$$f'(x) = \frac{x^2}{(x-a)(x+a)(x^2+a^2)}$$

$\boxed{Q\ 27}$

$$f'(x) = \frac{3}{1+x^2}$$

$\boxed{Q\ 28}$

$$f'(x) = \frac{2}{x\sqrt{1+x^2}}$$

$\boxed{Q\ 29}$

$$f'(x) = \frac{-4x}{\sqrt{x^4+1}}$$

$\boxed{Q\ 30}$ f est dérivable sur $]0{,}1[$ et

$$f'(x) = \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$$

$\boxed{Q\ 31}$ Puisque $|\sin x| < \sqrt{1+\sin^2 x}$, la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$$

$\boxed{Q\ 32}$ La fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{2(1+\ln x)}{x^x + x^{-x}}$$

$\boxed{Q\ 33}$ La fonction est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{x^{x+1}\ln x(\ln x - 1)}{e^x}$$

$\boxed{Q\ 34}$ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = \frac{nx^{n-1}}{2\sqrt{x^{2n}+1}}$$

$\boxed{Q\ 35}$

$$f'(x) = \frac{\ln\ln\ln x}{x\ln x}$$