Ex 1 Facile

Trouver un équivalent lorsque $x \to 1$ de la fonction définie par $f(x) = e^{x^2+1} - e^{3x-1}$.

Ex 2 Facile

Déterminer la limite lorsque $x \to +\infty$ de la fonction définie par

$$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$$

Ex 3 Facile

Trouver un équivalent lorsque $x \to \frac{\pi}{2}$ de la fonction

$$f(x) = \sin x + \cos(2x)$$

Ex 4 Facile

Trouver la limite lorsque $x \to \pi^+$ de la fonction

$$f(x) = (1 + \cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$$

Ex 5 Facile

Trouver un équivalent lorsque $x \to +\infty$ de la fonction

$$f(x) = x^{\sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right)} - 1$$

Ex 6 Facile

Trouver un équivalent simple lorsque $x \to +\infty$ de la fonction définie par

$$f(x) = \ln\left(e^{x^2+1} - x^2\right) + \ln\left(x^2 - 1\right)$$

Ex 7 Facile

Trouver un équivalent simple lorsque $x \to +\infty$ de la fonction définie par

$$f(x) = \frac{\ln\left(x^2+1\right) - \ln\left(2x^2-1\right)}{\ln\left(x^3+1\right) - \ln\left(x^3-1\right)}$$

Corrigé des exercices

$\boxed{Q\ 1}$ Par le changement de variables $h = x-1$, on cherche un équivalent lorsque $h \to 0$ de

$$g(h) = f(1+h) = e^2\left[\left(e^{2h+h^2}-1\right) - \left(e^{3h}-1\right)\right]$$

Puisque $2h+h^2 \sim 2h$, $e^{2h+h^2}-1 \sim 2h$ et $\left(e^{3h}-1\right) \sim 3h$. On montre alors que $g(h) \sim -e^2 h$ en mettant $-e^2 h$ en facteur et en montrant que la parenthèse tend vers 1. On a alors :

$$f(x) \sim -e^2(x-1)$$

$\boxed{Q\ 2}$ En utilisant les quantités conjuguées, pour $x > 0$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}+\sqrt{x}}$$

En factorisant au numérateur et au dénominateur par $\sqrt{x}$,

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{3/2}}}}+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{2}$$

$\boxed{Q\ 3}$ Par le changement de variables $h = x - \frac{\pi}{2}$, on se ramène à trouver un équivalent lorsque $h \to 0$ de

$$g(h) = \sin(\frac{\pi}{2}+h) + \cos(\pi+2h) = \cos h - \cos(2h) = (1-\cos(2h)) - (1-\cos h)$$

On montre alors que $g(h) \sim \frac{3h^2}{2}$ et donc que

$$\boxed{f(x) \sim \frac{3}{2}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}$$

$\boxed{Q\ 4}$ Par le changement de variables $h = x-\pi$, on se ramène à trouver la limite lorsque $h \to 0^+$ de la fonction

$$g(h) = f(\pi+h) = (1-\cos h)^{-\frac{1}{\sin h}} = e^{-\frac{1}{\sin h}\ln(1-\cos h)}$$

En posant

$$\alpha(h) = -\frac{1}{\sin h}\ln(1-\cos h)$$

puisque $h \to 0$, d'après l'équivalent classique,

$$(1-\cos h) \sim \frac{h^2}{2} \text{ donc } (1-\cos h) = \frac{h^2}{2}\theta(h) \text{ avec } \theta(h) \to 1$$

Alors

$$\ln(1-\cos h) = \ln\left(\frac{h^2}{2}\theta(h)\right) = 2\ln h - \ln 2 + \ln\theta(h)$$

et donc

$$\ln(1-\cos h) \sim 2\ln h$$

Alors

$$\alpha(h) \sim -\frac{2\ln h}{h} \to +\infty$$

Par conséquent $g(h) \to +\infty$ et donc

$$f(x) \xrightarrow[x\to\pi^+]{} +\infty$$

$\boxed{Q\ 5}$ Sous forme exponentielle :

$$f(x) = e^{\sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\ln x}$$

En posant

$$\alpha(x) = \sin\left(\frac{1}{x^2+1}\right)\ln x$$

$$\alpha(x) \sim \frac{\ln x}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Et donc on peut utiliser l'équivalent classique pour l'exponentielle:

$$f(x) \sim \alpha(x) \sim \boxed{\frac{\ln x}{x^2}}$$

$\boxed{Q\ 6}$ Ecrivons :

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left[e^{x^2+1}\left(1-\frac{x^2}{e^{x^2+1}}\right)\right] + \ln\left[x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\right] \\ &= x^2 + 2\ln x + 1 + \ln\left(1-\frac{x^2}{e^{x^2+1}}\right) + \ln\left(1-\frac{1}{x^2}\right) \\ &\sim x^2 \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{f(x) \sim x^2}$$

$\boxed{Q\ 7}$ Cherchons un équivalent du numérateur puis du dénominateur :

$$\begin{aligned} n(x) &= \ln(x^2+1) - \ln(2x^2-1) \\ &= \ln x^2 + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \ln(2x^2) - \ln\left(1-\frac{1}{2x^2}\right) \\ &= 2\ln x - \ln 2 - 2\ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{2x^2}\right) \\ &= -\ln 2 + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) - \ln\left(1-\frac{1}{2x^2}\right) \\ &\sim -\ln 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(x) &= \ln(x^3+1) - \ln(x^3-1) \\ &= \ln\left(\frac{x^3+1}{x^3-1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{1+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}}\right) \\ &= \ln\left(1+\frac{\frac{2}{x^3}}{1-\frac{1}{x^3}}\right) \\ &=\sim \frac{2}{x^3} \end{aligned}$$

Par conséquent, on trouve que

$$\boxed{f(x) \sim -\frac{\ln 2}{2}x^3}$$