1 Autour des séries géométriques

Ex 1 `Facile`

On considère une suite d'entiers $(q_n)_{n\geq 0}$ croissante telle que $q_0 \geq 2$. Montrer que la suite de terme général

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{q_0 \dots q_k}$$

converge vers une limite $l \leq 1$.

Ex 2 `Facile`

On considère un réel $x \in [0,1[$ et la suite de terme général

$$S_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n$$

a. Déterminer la limite $l(x)$ de cette suite.
b. Trouver (sans calculatrice !) en n'utilisant que des multiplications et des additions, une valeur approchée de $\dfrac{1}{1.01}$ à 10^{-5} près.

Ex 3 `Moyen`

Trouver un équivalent de la suite de terme général

$$S_n = 1 + 11 + 111 + \dots + \underbrace{1\dots1}_{\text{k fois}}$$

Ex 4 `Moyen, classique, à faire`

Soit $x \in]-1,1[$. Déterminer la limite de la suite de terme général

$$S_n = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \dots + nx^n$$

2 Limites de fonctions

Ex 5 `Facile`

Montrer que la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \cos(\ln(x))$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

Ex 6 `Facile`

Cacluler $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{E(1/x)+x}{E(1/x)-x}$

Ex 7 `Facile`

Soit la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{array} \right.$$

Montrer que la fonction f est discontinue en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$.

Ex 8 `Moyen`

On considère les fonctions définies sur $[1,+\infty[$ par :

$$f(x) = \sin(\sqrt{x}) \text{ et } g(x) = \sin(x^2)$$

Sont-elles lipschitziennes sur $[1,+\infty[$?

Ex 9 `Moyen`

Soit une fonction $f : [0,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle $[0,+\infty[$ telle que

$$\forall x \geq 0, \quad f(x^2) = f(x)$$

Déterminer la fonction f.

INDICATION : Soit $x > 0$, considérer la suite récurrente

$$u_0 = x \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n}$$

Ex 10 `Moyen`

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x)f(y)$$

a) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.
b) On suppose qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$. Montrer que $f = 0$.
c) On suppose que f n'est pas la fonction nulle. Déterminer la fonction f.

3 Propriétés globales des fonctions continues

Ex 11 `Facile`

Soit une fonction $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ continue sur le segment $[0,1]$. Soient deux réels $p,q > 0$. Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que

$$pf(0) + qf(1) = (p+q)f(x_0)$$

Ex 12 `Moyen`

On considère deux fonctions continues sur $[0,1]$ vérifiant :

$$\forall x \in [0,1],\ 0 < f(x) < g(x)$$

On considère une suite (x_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [0,1]$ et on définit la suite (u_n) de terme général

$$u_n = \left[\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right]^n$$

Étudier la suite (u_n).

Corrigé des exercices

$\boxed{Q\ 1}$ On montre facilement que la suite (S_n) est croissante. La majorer par une série géométrique : $\forall k \in \mathbb{N}$, $q_0 \dots q_k \geq q_0^{k+1} \geq 2^{k+1}$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$S_n \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}} = 2\frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-1/2} = 1-(1/2)^{n+1} \leq 1$$

D'après le théorème de la limite monotone, la suite (S_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$. Par passage à la limite dans les inégalités, il vient ensuite que $l \leq 1$.

$\boxed{Q\ 2}$

a. C'est une suite géométrique de raison $-x$, avec $-x \neq 1$. Par conséquent,

$$S_n(x) = \frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{1+x}$$

Elle converge vers $\boxed{l = \dfrac{1}{1+x}}$.

b. Prenons $x = 0.01 = 10^{-2}$. On dispose d'une majoration de l'erreur :

$$\varepsilon_n = |S_n(x) - l| = \frac{|x|^{n+1}}{1+x} \leq x^{n+1}$$

Pour être sûr que $S_n(x)$ soit une valeur approchée de $\dfrac{1}{1.01} = \dfrac{1}{1+10^{-2}}$ à 10^{-5} près, il suffit de choisir n tel que $10^{-2(n+1)} \leq 10^{-5}$, c'est à dire $10^{2n+1} \geq 10^5$, c'est à dire $2n+1 \geq 5$ ou encore $n \geq 2$. Alors $S_2(x) = 1 - 10^{-2} + 10^4 = \boxed{0.9901}$ est une valeur approchée de $1/1.01$ à 10^{-5} près.

$\boxed{Q\ 3}$ Remarquons que

$$\underbrace{1\dots1}_{\text{k fois}} = 1 + 10 + \dots + 10^{k-1} = \frac{10^k - 1}{10-1} = \frac{10^k-1}{9}$$

Alors, on calcule explicitement S_n pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{10^k-1}{9} \\ &= \frac{10}{9}\sum_{i=0}^{n-1} 10^i - \frac{n}{9} \\ &= \frac{10^{n+1}}{81} - \frac{n}{9} - \frac{10}{81} \end{aligned}$$

d'où $\boxed{S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{10^{n+1}}{81}}$.

$\boxed{Q\ 4}$ Nous allons calculer explicitement S_n en utilisant une technique classique. Posons

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 + x + \dots + x^n \end{array} \right.$$

Alors $\forall x \in]-1,1[$, $f(x) = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$. Mais f est dérivable sur $I =]-1,1[$ et $\forall x \in I$,

$$f'(x) = 1 + 2x + \dots + nx^{n-1}$$

Par conséquent, $S_n(x) = 1 + xf'(x)$. Mais on calcule pour $x \in I$, $f'(x) = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$ et donc

$$\boxed{S_n(x) = 1 + \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}}$$

et puisque $nx^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, (car $n = o((1/x)^n)$), il vient que

$$\boxed{S_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 + \frac{x}{(x-1)^2} = \frac{x^2-x+1}{(x-1)^2}}$$

On peut généraliser cette technique en dérivant plusieurs fois f pour calculer les sommes $1+x+2^2x^2+\dots+n^2x^n$ ...

$\boxed{Q\ 5}$ Définissons les suites $x_n = e^{2n\pi}$ et $y_n = e^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$. Elles tendent vers $+\infty$. Supposons que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l$. Alors $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} l$ or $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = 1$. Donc $l = 1$. Mais de même, puisque $f(y_n) = 0$, on devrait avoir $l = 0$, une contradiction avec l'unicité de la limite. Donc f n'admet pas de limite en $+\infty$.

$\boxed{Q\ 6}$ La fonction

$$f(x) = \frac{E(\frac{1}{x}) + x}{E(\frac{1}{x}) - x}$$

est bien définie pour $x \in]0,1[$, car $E(\frac{1}{x}) \geq 1 > x$. Encadrons

$$\frac{1}{x} - 1 < E(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x}$$

et donc

$$\frac{\frac{1}{x} + x - 1}{\frac{1}{x} - x} \leq f(x) \leq \frac{\frac{1}{x} + x}{\frac{1}{x} - x - 1}$$

$$\frac{1 + x^2 - x}{1 - x^2} \leq f(x) \leq \frac{1 + x^2}{1 - x^2 - 1}$$

et par le théorème des gendarmes, on obtient que $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 1$.

$\boxed{Q\ 7}$ Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{Q} \quad \text{tq } |x - a| \leq \varepsilon$$

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$, on trouve $a_n \in \mathbb{Q}$ tel que $|x - a_n| \leq \dfrac{1}{n}$. On construit ainsi une suite (a_n) de rationnels vérifiant $\forall n \geq 1$, $|x - a_n| \leq \dfrac{1}{n}$ et donc la suite (a_n) converge vers x. De la même façon, puisque $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on construit une suite (b_n) de nombres irrationnels qui converge vers x. Mais alors si l'on suppose que f est continue au point x, $\forall n \geq 1$, $f(a_n) = 1$ et donc $f(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, mais puisque f est continue au point x, $f(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$, ce qui montre que $f(x) = 1$. D'autre part, $\forall n \geq 1$, $f(b_n) = 0$ et $f(b_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ ce qui montre que $f(x) = 0$, une absurdité. Par conséquent, la fonction f n'est pas continue au point x.

$\boxed{Q\ 8}$

- Montrons que f est lipschitzienne. Posons $K = 1/2$. Soient $(x,y) \in [1, +\infty[^2$. En utilisant la formule de trigonométrie :

$$\sin p - \sin q = 2 \sin(\frac{p-q}{2}) \cos(\frac{p+q}{2})$$

la majoration $\left|\sin\theta\right| \leq |\theta|$ et les quantités conjuguées, on majore :

$$\begin{aligned}
\left|f(x) - f(y)\right| &= \left|2 \sin(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2}) \cos(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2})\right| \\
&\leq 2\left|\sin(\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{2})\right| \\
&\leq |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \\
&\leq \frac{|x-y|}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \\
&\leq \frac{|x-y|}{2} & \leq K|x-y|
\end{aligned}$$

– Montrons que g n'est pas lipschitzienne. Par l'absurde, supposons qu'il existe $K > 0$ tel que $\forall (x,y) \in [1, +\infty[^2$, $|g(x) - g(y)| \leq K|x - y|$. Considérons les deux suites (x_n) et (y_n) définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \sqrt{2n\pi + \pi/2},\ y_n = \sqrt{2n\pi}$$

On calcule alors pour $n \in \mathbb{N}$:

$$|g(x_n) - g(y_n)| = 1 \text{ et } |x_n - y_n| = \sqrt{2n\pi + \pi/2} - \sqrt{2n\pi} = \frac{\pi/2}{\sqrt{2n\pi + \pi/2} + \sqrt{2n\pi}}$$

Mais alors

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq K \frac{\pi/2}{\sqrt{2n\pi + \pi/2} + \sqrt{2n\pi}}$$

Et en passant à la limite dans cette inégalité lorsque $n \to +\infty$, on aurait $1 \leq 0$ ce qui est absurde.

$\boxed{Q\ 9}$ La suite récurrente de l'énoncé s'étudie classiquement : si $x > 0$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Comme la fonction f est supposée continue, si $x > 0$, $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)$. Mais puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(u_{n+1}) = f(u_{n+1}^2) = f(u_n)$, la suite $\big(f(u_n)\big)$ est constante. Par conséquent, $f(x) = f(1)$.
On a montré que la fonction f est constante sur $]0, +\infty[$. Ensuite puisque la fonction f est continue en 0, $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$ et comme $\forall x > 0$, $f(x) = f(1)$, il vient que $f(0) = f(1)$. Par conséquent les seules fonctions vérifiant l'hypothèse de l'énoncé sont les fonctions constantes.
Réciproquement, les fonctions constantes conviennent.

$\boxed{Q\ 10}$ Soit un réel $x \in \mathbb{R}$. Puisque $f(x) = f(\frac{x}{2})^2 \geq 0$, il vient que la fonction f est positive. S'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = 0$, alors si $z \in \mathbb{R}$, $f(z) = f(x)f(z - x) = 0$, et donc f est la fonction nulle. Supposons donc que $f \neq 0$. Posons alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \ln f(x)$. Alors g vérifie

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x + y) = g(x) + g(y)$$

On sait alors qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = ax$. Mais alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = e^{ax} = a^x$.

$\boxed{Q\ 11}$ Introduisons la fonction définie par $\phi(x) = (p + q)f(x) - pf(0) - qf(1)$.
Cette fonction ϕ est continue sur le segment $[0,1]$ et

$$\phi(0) = q(f(0) - f(1)), \quad \phi(1) = p(f(1) - f(0))$$

Comme $p,q > 0$, $\phi(0)$ et $\phi(1)$ sont de signes opposés, d'après le TVI, $\exists x_0 \in [0,1]$ tel que $\phi(x_0) = 0$.

$\boxed{Q\ 12}$ Considérons la fonction h définie sur $[0,1]$ par $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Elle est continue sur le segment $[0,1]$ et vérifie

$$\forall x \in [0,1],\ 0 < h(x) < 1$$

Comme $[0,1]$ est un segment, cette fonction possède un maximum : il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que

$$\forall x \in [0,1],\ 0 \leq h(x) \leq h(x_0)$$

Posons $k = h(x_0)$. Par hypothèse, $k = h(x_0) < 1$. Soit alors $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq u_n \leq k^n$$

Et la suite géométrique (k^n) converge vers 0 (car $0 \leq k < 1$). La suite (u_n) converge donc vers 0 d'après le théorème des gendarmes.