Ex 1 `Facile`

En utilisant des majorations convenables, étudiez la convergence de la suite de terme général $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

Ex 2 `Moyen`

On considère une suite (u_n) vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N}^\star,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{k}{n} + \frac{1}{k}$$

Montrez que la suite (u_n) est convergente, et déterminez sa limite.

Ex 3 `Facile`

Étudiez la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{k}{\sqrt{n^2+k^2}}$$

Ex 4 `Moyen`

Soit une suite réelle (u_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{Z}$. Montrer que si la suite (u_n) converge, alors elle est constante à partir d'un certain rang.

Indication : Montrer d'abord que la limite est un entier $l \in \mathbb{Z}$. Pour cela, procéder par l'absurde et considérer $n = E(l)$.

Ex 5 `Facile`

Soit un réel non nul $x \in \mathbb{R}$. Étudiez les suites de terme général

$$u_n = \frac{E(nx)}{n} \text{ et } v_n = \frac{E(nx)}{x}$$

Ex 6 `Facile`

Soit une suite *croissante* (u_n). On suppose qu'il existe une suite extraite de (u_n) convergente. Montrez alors que la suite (u_n) converge.

Ex 7 `Facile`

Étudiez la suite de terme général

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$$

Ex 8 `Facile`

Étudiez la convergence de la suite de terme général

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

Ex 9 `Moyen`

Soit une suite (u_n) bornée vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 2u_n \leq u_{n+1} + u_{n-1}$$

On définit une suite (v_n) en posant pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$. Montrez que la suite (v_n) converge et calculez sa limite.

Indication : Montrez que la suite (v_n) est croissante et majorée. Montrez ensuite par l'absurde que sa limite vaut 0. (on pourra si $l > 0$ minorer (u_n) à partir d'un certain rang par une suite qui diverge vers $+\infty$).

Ex 10 `Facile`

Soit une suite croissante (u_n). On suppose que sa moyenne de Césaro converge :

$$\frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} l \in \mathbb{R}$$

Montrer qu'alors la suite (u_n) converge vers l.

Ex 11 `Moyen, Important`

Etudiez la suite de terme général :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

Ex 12 `Moyen, Très important, à faire`

Soient deux réels $a_0 > 0$ et $b_0 > 0$. On définit deux suites (a_n) et (b_n) par les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \leq b_n$.
b) Montrer que (a_n) et (b_n) sont monotones à partir du rang 1, qu'elles convergent et qu'elles ont la même limite.

Ex 13 `Moyen`

Soit $u_0 > 0$ et (u_n) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}$$

a) Trouver une relation de récurrence simple entre deux termes successifs u_{n+1} et u_n.
b) Montrer que la suite (u_n) est croissante
c) Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

Ex 14 `Facile`

Etudiez la suite récurrente définie par $u_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$$

Corrigé des exercices

$\boxed{Q\ 1}$ Grouper les termes : soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{n}{n}\frac{n-1}{n}\frac{n-2}{n}\dots\frac{2}{n}\frac{1}{n} \quad (n \geq 2)$$

et majorer tous les termes $\frac{k}{n} \leq 1$ pour $k \geq 2$. On obtient alors que

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{n} \to 0$$

et donc $u_n \to 0$ d'après le théorème de majoration.

$\boxed{Q\ 2}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $k = E(\sqrt{n})$. D'après l'énoncé, on obtient l'encadrement

$$0 \leq u_n \leq \frac{E(\sqrt{n})}{n} + \frac{1}{E(\sqrt{n})}$$

Mais puisque $E(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n} < E(\sqrt{n}) + 1$, on obtient l'encadrement

$$\sqrt{n} - 1 < E(\sqrt{n}) \leq \sqrt{n}$$

Donc, on a l'encadrement suivant pour u_n valable pour $n \geq 2$:

$$0 \leq u_n \leq \frac{\sqrt{n}}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}-1}$$

Si $n \geq 4$, $\sqrt{n} - 1 \geq \sqrt{n}/2$ et donc,

$$\forall n \geq 4, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{3}{\sqrt{n}}$$

Puisque la suite $(3/\sqrt{n})$ converge vers 0, et que $\forall n \geq 4$, $|u_n| \leq 3/\sqrt{n}$, par le théorème de majoration, on en déduit que la suite (u_n) converge vers 0.

$\boxed{Q\ 3}$ Soit $n \geq 1$, $\dfrac{k}{\sqrt{n^2+k^2}} \geq \dfrac{n}{\sqrt{n^2+4n^2}} \geq \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ d'où $u_n \geq \dfrac{n}{\sqrt{5}}$. La suite (u_n) diverge donc vers $+\infty$ d'après le théorème des gendarmes.

$\boxed{Q\ 4}$ Notons $l = \lim u_n$. Si on suppose que $l \notin \mathbb{Z}$, en notant $p = E(l)$,

$$p < l < p + 1$$

Notons alors

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\min(l-p, p+1-l)$$

Pour cet $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $l - \varepsilon < u_n < l + \varepsilon$. Mais alors pour $n \geq N$,

$$p < l - \varepsilon \leq u_n \leq l + \varepsilon < p + 1$$

ce qui est impossible car $u_n \in \mathbb{Z}$.
Posons ensuite $\varepsilon = \frac{1}{2}$: $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$,

$$l - \frac{1}{2} \leq u_n \leq l + \frac{1}{2}$$

Mais alors

$$-\frac{1}{2} \leq u_n - l \leq \frac{1}{2}$$

Puisque $u_n - l \in \mathbb{Z}$, forcément $u_n = l$ à partir du rang N.

$\boxed{Q\ 5}$ Pour étudier la suite (u_n), encadrons la partie entière. Soit $n \in \mathbb{N}$, $E(nx) \leq nx < E(nx) + 1$ ce qui fournit un encadrement de $E(nx)$: $nx - 1 < E(nx) \leq nx$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on obtient l'encadrement suivant de u_n :

$$x - \frac{1}{n} < u_n \leq x$$

Et grâce au théorème des gendarmes, on conclut que (u_n) converge vers x. L'étude de (v_n) est similaire: mais il faut distinguer deux cas :

1. $x > 0$, alors

$$v_n > n - \frac{1}{x}$$

et donc (v_n) diverge vers $+\infty$ d'après le théorème des gendarmes.

2. $x < 0$, alors
$$E(nx) \leq nx \Rightarrow \frac{E(nx)}{x} \geq n$$
(on change les inégalités en les multipliant par un réel négatif!) Ici aussi, (v_n) diverge vers $+\infty$.

$\boxed{Q\ 6}$ Utilisons le théorème de la limite monotone. Si la suite (u_n) ne convergeait pas, elle divergerait vers $+\infty$, mais alors toute suite extraire de (u_n) divergerait aussi vers $+\infty$, une absurdité.

$\boxed{Q\ 7}$ Majorons pour $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$$
Par conséquent, la suite (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge.

$\boxed{Q\ 8}$ Calculons pour $n \in \mathbb{N}$:
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \\ &\geq \frac{2}{2n+2} - \frac{1}{n+1} \geq 0 \end{aligned}$$
(car $2n+1 \leq 2n+2$). On a montré que la suite (u_n) est croissante. D'autre part, si l'on majore chacun des termes par le plus grand, on obtient la majoration suivante :
$$u_n \leq \frac{n}{n+1} \leq 1$$
et donc la suite (u_n) est majorée par 1. Par conséquent, elle converge d'après le théorème de la limite monotone.

$\boxed{Q\ 9}$ On calcule pour $n \geq 1$,
$$v_n - v_{n-1} = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} \geq 0$$
et donc la suite (v_n) est croissante. On suppose de plus que (u_n) est bornée :
$$\exists M \in \mathbb{R} \text{ tq } \forall n \in \mathbb{N}, \quad -M \leq u_n \leq M$$
Donc $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$v_n = u_{n+1} - u_n \leq M + M \leq 2M$$
La suite (v_n) est donc croissante et majorée par $2M$.
D'après le théorème de la limite monotone, la suite (v_n) converge vers une limite finie $l \in \mathbb{R}$.
Montrons par l'absurde que $l = 0$. Si $l \neq 0$, étudions deux cas :

1. Si $l > 0$, en posant $k = \frac{l}{2}$, puisque $k < l$, d'après un théorème du cours, $\exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N$, $v_n \geq \frac{l}{2}$. Mais alors pour $n \geq N+1$,
$$u_n \geq u_{n-1} + \frac{l}{2} \geq u_{n-2} + 2\frac{l}{2} \geq \cdots \geq u_N + (n-N)\frac{l}{2}$$
Mais la suite $w_n = u_N - N\frac{l}{2} + n\frac{l}{2} \to +\infty$ et donc $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, ce qui est impossible car on a supposé que la suite (u_n) était bornée.
2. Si $l < 0$, on montre qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq -\frac{l}{2}$. Mais on majore alors (u_n) par une suite qui diverge vers $-\infty$ ce qui est impossible.

$\boxed{Q\ 10}$ D'après le théorème de la limite monotone, il n'y a que deux possibilités :

1. Si la suite (u_n) est majorée, alors on sait que (u_n) converge vers une limite finie $l' \in \mathbb{R}$. Mais d'après le théorème de Césaro, (S_n) converge également vers l'. Par unicité de la limite, $l = l'$ et donc (u_n) converge vers l.
2. Si la suite (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$. Mais d'après le théorème de Césaro, (S_n) divergerait aussi vers $+\infty$ ce qui est impossible.

Par conséquent, (u_n) converge vers l.

$\boxed{Q\ 11}$ On étudie les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) et on montre qu'elles sont adjacentes. Elles convergent alors vers la même limite $l \in \mathbb{R}$ et donc, d'après un lemme du cours,la suite (u_n) converge vers l. Pour le détail, reprendre l'exercice correspondant du cours.

$\boxed{Q\ 12}$ On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n > 0$ et $b_n > 0$, ce qui montre que a_n et b_n sont définis $\forall n \in \mathbb{N}$. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n}\sqrt{b_n} \leq \frac{1}{2}(\sqrt{a_n}^2 + \sqrt{b_n}^2) = b_{n+1}$$

Soit $n \geq 1$. Calculons

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\frac{b_n}{a_n}} \geq \sqrt{\frac{a_n}{a_n}} = 1 \text{ et } b_{n+1} - b_n = \frac{a_n - b_n}{2} \leq 0$$

(on a utilisé que $a_n \leq b_n$). Donc $\forall n \geq 1$, $a_{n+1} \geq a_n$ et $b_{n+1} \leq b_n$. Donc (a_n) est croissante et (b_n) décroissante. Puisque

$$a_1 \leq \dots \leq a_{n-1} \leq a_n \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \dots b_1$$

La suite (a_n) est croissante et majorée par b_1. Donc elle converge vers $l \in \mathbb{R}$. De même, la suite (b_n) est décroissante et minorée par a_1, et donc elle converge vers $l' \in \mathbb{R}$. De plus, la suite (a_{n+1}) est extraite de (a_n) et elle converge donc vers l. De même, la suite extraite (b_{n+1}) converge vers l'. En passant à la limite dans les relations de récurrence, on obtient :

$$l = \sqrt{ll'} \text{ et } l = \frac{l + l'}{2}$$

De la deuxième, on en tire que $l = l'$.
Les deux suites convergent donc vers la même limite.

$\boxed{Q\ 13}$ Remarquez que

$$u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_n} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$$

Soit alors $f(x) = \sqrt{x^2 + x}$. On a une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$. On vérifie par récurrence que si $u_0 > 0$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ ce qui permet de définir u_{n+1}. Donc la suite (u_n) est bien définie.
Calculons alors

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2 + u_n} - u_n = \frac{u_n^2 + u_n - u_n^2}{\sqrt{u_n^2 + u_n} + u_n} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + u_n} + u_n} \geq 0$$

La suite (u_n) est donc croissante.
Par l'absurde, si la suite (u_n) convergeait vers $l \in \mathbb{R}$, on devrait avoir $l = f(l)$, c'est à dire $l = \sqrt{l^2 + l}$ et donc $l = 0$. Mais c'est impossible car $u_0 > 0$ et (u_n) est croissante.
D'après le théorème de la limite monotone, on en déduit que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.

$\boxed{Q\ 14}$ On vérifie par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$ et donc que la suite (u_n) est bien définie.
Tracer le graphe de la fonction $f(x) = \sqrt{x+1}$ définie sur $[0, +\infty[$, et la première bissectrice. Considérer alors la fonction $g(x) = f(x) - x$, et chercher son signe:

$$g(x) = \frac{1 + x - x^2}{\sqrt{1+x} + x} = -\frac{x^2 - x - 1}{\sqrt{1+x} + x}$$

Notons $k = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. La fonction g est positive sur $[0,k]$, négative sur $[k, +\infty[$. Donc la fonction f possède un unique point fixe $k \in [0, +\infty[$.
Puisque $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$, si $u_n \leq k$, $u_{n+1} \geq u_n$ et si $u_n \geq k$, $u_{n+1} \leq u_n$.
On vérifie en utilisant les variations de f que les intervalles $[0,k]$ et $[k, +\infty[$ sont stables. On étudie alors deux cas :

1. Si $u_0 \in]0,k]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,k]$ et la suite (u_n) est croissante et majorée par k. Elle converge alors vers l'unique point fixe de f, k.
2. Si $u_0 \in [k, +\infty[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [k, +\infty[$ et la suite (u_n) est décroissante et minorée par k. Elle converge donc vers l'unique point fixe de f, k.

On a donc montré que $\forall u_0 > 0$, $\boxed{u_n \to \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.