Ex 1 `facile`

Majorer et minorer pour $n \geq n_0$ (à déterminer), les suites suivantes par des suites de la forme $c.n^p$ (avec le même exposant pour la majoration et la minoration).

a) $u_n = \dfrac{2n^5 - n^4 + n^2 - 1}{n^2 + n - 1}$

b) $u_n = \dfrac{n^2 + \frac{n^2-1}{n+1}}{n + \frac{n^3-1}{n+3}}$

Ex 2 `Facile`

Montrez que l'ensemble

$$A = \left\{ \frac{\sin(xy)}{x^2 + y^2};\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x,y) \neq (0,0) \right\}$$

est borné.

Ex 3 `Facile`

On considère la partie de $\mathbb{R}$ suivante :

$$A = \{\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1};\ x \in \mathbb{R}\}$$

Déterminer s'ils existent $\sup A, \inf A, \min A, \max A$.

Ex 4 `Facile`

On considère la partie de $\mathbb{R}$ suivante :

$$A = \{(-1)^n + \frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\}$$

Déterminer $\sup A$ et $\inf A$.

Ex 5 `Moyen, à faire`

Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et deux applications bornées $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrez que :

$$\left|\sup_{x\in I} f(x) - \sup_{x\in I} g(x)\right| \leq \sup_{x\in I} |\, f(x) - g(x)\,|$$

Indication : Montrez que $\sup\limits_I f - \sup\limits_I g \leq \sup\limits_I |f - g|$ et dans un deuxième temps que $\sup\limits_I g - \sup\limits_I f \leq \sup\limits_I |f - g|$.
Soit $x \in I$, écrire $f(x) = f(x) - g(x) + g(x)$ et majorer $f(x) \leq |f(x) - g(x)| + g(x)$.
Utiliser ensuite le raisonnement de passage à la borne sup.

Ex 6 `Moyen`

On considère la fonction définie sur $[0,1]$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{p^2 + q^2} & \text{si } x = \dfrac{p}{q},\ p \wedge q = 1 \\ \dfrac{1}{x^2 + 3} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Déterminer $\sup_{x\in[0,1]} f(x)$ et $\inf_{x\in[0,1]} f(x)$.

Ex 7 `Moyen, à faire`

On considère une partie $A \subset \mathbb{R}$ non vide et bornée :

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \forall a \in A,\ |a| \leq M$$

La partie A admet donc une borne supérieure $\sup A$ et une borne inférieure $\inf A$. On définit l'ensemble des distances entre éléments de A :

$$\mathcal{D}_A = \{|y - x|\ ;\ (x,y) \in A^2\}$$

a. Montrer que la partie $\mathcal{D}_A$ possède une borne supérieure. On notera $\delta(A) = \sup \mathcal{D}_A$ cette borne supérieure que l'on appelle *diamètre* de la partie A.
b. Montrer que $\delta(A) \leq \sup A - \inf A$.
c. Montrer que $\delta(A) = \sup A - \inf A$.
d. On considère une nouvelle partie $B \subset \mathbb{R}$ non vide et bornée telle que $B \cap A \neq \emptyset$. Montrer que $\delta(A \cup B)$ existe, puis que $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B)$.

e. On considère maintenant une application $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |f(y) - f(x)| \leq |y - x|$$

Montrer que la partie $f(A)$ est non vide et bornée (elle admet donc un diamètre noté $\delta\big(f(A)\big)$).

f. Montrer que $\delta\big(f(A)\big) \leq \delta(A)$.

Ex 8 `Moyen, intéressant`

Soit $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ une fonction non-nulle vérifiant :

$$(\star) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$(\star\star) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

a. Montrez que $f(1) = 1$ et $f(0) = 0$.

b. Montrez que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n$.

c. Montrez que $\forall r \in \mathbb{Q}^+,\ f(r) = r$.

d. Montrez que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) \geq 0$.

e. Montrez que f est une fonction croissante.

f. Montrez que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) = x$. (On raisonnera par l'absurde, en supposant par exemple que $x < f(x)$ et on introduira un rationnel r tel que $x < r < f(x)$).

Corrigé des exercices

$\boxed{Q\ 1}$ a) On obtient, puisque $\forall n \geq 2$,

$$\begin{aligned} 0 \leq n^4 \leq n^5 \\ 0 \leq n^2 \leq n^5 \\ 0 \leq 1 \leq \frac{n^5}{2} \\ 0 \leq n \leq n^2 \\ \frac{2n^3}{3} \leq u_n \leq 6n^3 \end{aligned}$$

b) Majorons u_n :

$$u_n \leq \frac{n^2 + \frac{n^2}{n}}{n + \frac{n^3/2}{2n}} = \frac{n^2+n}{n+\frac{n^2}{4}} \leq \frac{2n^2}{5n^2/4} = \frac{8}{5}$$

Nous avons utilisé que pour $n \geq 2$, $1 \leq n^3/2$ et pour $n \geq 3$, $3 \leq n$. Minorons maintenant u_n :

$$u_n \geq \frac{n^2}{n + \frac{n^3}{n}} = \frac{n^2}{n^2+n} \geq \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

Nous avons utilisé que $\frac{n^2-1}{n+1} \geq 0$ pour $n \geq 1$.

$\boxed{Q\ 2}$ Posons $M = 1/2$. Soit $r \in A$, il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $(x,y) \neq (0,0)$ tels que $r = \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2}$. Alors

$$\begin{aligned} |r| &\leq \frac{|\sin(xy)|}{x^2+y^2} \\ &\leq \frac{|xy|}{x^2+y^2} \\ &\leq \frac{\frac{x^2+y^2}{2}}{x^2+y^2} \\ &\leq 1/2 = M \end{aligned}$$

La partie A est donc bornée.

$\boxed{Q\ 3}$ Soit $x \in \mathbb{R}$. Écrivons :

$$\frac{x^2+2}{x^2+1} = 1 + \frac{1}{x^2+1}$$

Alors on obtient immédiatement que A est minorée par 1. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{1}{x^2+1} \leq \varepsilon$. Il suffit en effet de choisir $x \geq \sqrt{1/\varepsilon - 1}$ si $\varepsilon \leq 1$ et $x = 0$ si $\varepsilon > 1$. Alors

$$1 \leq \frac{x^2+2}{x^2+1} \leq 1 + \varepsilon$$

et par conséquent, $\inf A = 1$. A ne possède pas de plus petit élément car $\inf A \notin A$ (raisonnement par l'absurde). En effet, $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + \dfrac{1}{x^2+1} > 1$.
Majorons ensuite pour $x \in \mathbb{R}$,

$$1 + \frac{1}{x^2+1} \leq 1 + 1 \leq 2$$

(on a minoré le dénominateur car $x^2 \geq 0$). Par conséquent, A possède une borne supérieure et c'est le plus grand élément de A (il suffit de prendre $x = 0$). En définitive, $\sup A = \max A = 2$.

$\boxed{Q\ 4}$

$$A = \{0, \frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots\}$$

Faire un dessin représentant les points de A.
On montre facilement que

$$\max A = \sup A = \frac{3}{2}$$

En effet, c'est un majorant de A qui appartient à A.
Montrons que $\inf A = -1$ en utilisant la caractérisation par ε :

1. -1 est un minorant de A : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(-1)^n + \dfrac{1}{n} \geq (-1)^n \geq -1$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que n est impair et $\dfrac{1}{n} \leq \varepsilon$. Posons $x_\varepsilon = (-1)^n + \dfrac{1}{n} = -1 + \dfrac{1}{n}$. On a bien $x_\varepsilon \in A$ et $-1 \leq x_\varepsilon \leq -1 + \varepsilon$.

$\boxed{Q\ 5}$ Soit $x \in I$. Majorons :

$$f(x) = f(x) - g(x) + g(x) \leq |(f(x) - g(x)) + g(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x)| \leq \sup_I |(f-g)| + \sup_I |g|$$

Comme le membre de droite est un majorant indépendant de x, par passage à la borne sup, on en déduit que

$$\sup_I f \leq \sup_I |(f-g)| + \sup_I |g|$$

En écrivant de même

$$g(x) = g(x) - f(x) + f(x) \leq |f(x) - g(x)| + |f(x)| \leq \sup_I |(f-g)| + \sup_I |f|$$

on en déduit par passage à la borne sup que

$$\sup_I g \leq \sup_I |(f-g)| + \sup_I |f|$$

$\boxed{Q\ 6}$ Montrons que $\inf_{x \in [0,1]} f(x) = 0$.

- Il est clair que $\forall x \in [0,1],\ f(x) \geq 0$.
- Soit $\varepsilon > 0$, posons $q = E(1/\varepsilon) + 1$, on a $f(1/q) = \dfrac{1}{q^2+1} \leq \dfrac{1}{q^2} \leq \dfrac{1}{q} \leq \varepsilon$.

Nous avons donc montrée par la caractérisation à ε de la borne inf que $\inf f(x) = 0$. Montrons que $\sup_{x \in [0,1]} f(x) = 1$.

- Soit $x \in [0,1]$.
  1. Si $x = \dfrac{p}{q}$ est rationnel, $f(x) = \dfrac{1}{p^2+q^2} \leq \dfrac{1}{0^2+1^2} = 1$
  2. Si x est irrationnel, $f(x) = \dfrac{1}{x^2+3} \leq \dfrac{1}{3} \leq 1$

  Par conséquent, $\forall x \in [0,1],\ f(x) \leq 1$.
- $f(0) = f(\frac{0}{1}) = \dfrac{1}{0^2+1^2} = 1$

Par conséquent, $1 = \max_{x \in [0,1]} f(x) = \sup_{x \in [0,1]} f(x)$.

$\boxed{Q\ 7}$

a.
- $\mathcal{D}_A \subset \mathbb{R}$ par définition ;
- $\mathcal{D}_A \neq \emptyset$: puisque $A \neq \emptyset$, $\exists a \in A$. Alors $0 = |a - a| \in \mathcal{D}_A$.
- $\mathcal{D}_A$ est majorée : puisque la partie A est bornée, $\exists M > 0$ tel que $\forall a \in A,\ |a| \leq M$. Soit alors $r \in \mathcal{D}_A$, $\exists (x,y) \in A^2$ tel que $r = |y - x|$. Alors grâce à l'inégalité triangulaire, $r \leq |y| + |x| \leq 2M$.

Par conséquent, la partie $\mathcal{D}_A$ possède une borne supérieure $\delta(A) = \sup \mathcal{D}_A$.

b. Soit $r \in \mathcal{D}_A$: $\exists (x,y) \in A^2$ tels que $r = |y - x|$. Supposons par exemple que $x \leq y$ (l'autre cas est symétrique). Alors $r = y - x$ et comme $y \in A$, $y \leq \sup A$ et comme $x \in A$, $x \geq \inf A$ ce qui montre que $r \leq \sup A - \inf A$. Par passage à la borne supérieure, on obtient $\delta(A) \leq \sup A - \inf A$.

c. Soit $\varepsilon > 0$. Par la caractérisation de la borne supérieure de A, il existe $y \in A$ tel que $\sup A - \varepsilon/2 \leq y$. Par la caractérisation de la borne inférieure de A, il existe $x \in A$ tel que $x \leq \inf A + \varepsilon/2$. On peut supposer que $x \leq y$. En effet, si $x > y$, il suffirait de prendre $x' = y$ et $y' = x$ qui vérifieraient les mêmes inégalités. Alors

$$r = |y - x| = y - x \geq \sup A - \inf A - \varepsilon$$

et $r \in \mathcal{D}_A$. Nous avons donc montré :

(a) (1) $\forall r \in \mathcal{D}_A,\ r \leq (\sup A - \inf A)$ (b) ;

(b) (2) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists r \in \mathcal{D}_A$ tel que $(\sup A - \inf A) - \varepsilon \leq r$.

D'après la caractérisation de la borne supérieure de $\mathcal{D}_A$, on a donc $\delta(A) = \sup A - \inf A$.

d. La partie B étant non vide et bornée, $\delta(B)$ existe d'après les questions précédentes. Vérifions que la partie $A \cup B$ est bornée. Comme la partie A est bornée, $\exists M_A > 0$ tel que $\forall x \in A,\ |x| \leq M_A$. De même, puisque B est bornée, $\exists M_B > 0$ tel que $\forall x \in B,\ |x| \leq M_B$. Posons $M = \max(A,B)$. Soit $x \in A \cup B$. Étudions les deux cas :

- $x \in A,\ |x| \leq M_A \leq M$;

- $x \in B$, $|x| \leq M_B \leq M$.

Dans les deux cas, $|x| \leq M$. Comme la partie $A \cup B$ est non vide et bornée, elle admet un diamètre et donc $\delta(A \cup B)$ existe. Montrons maintenant que $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B)$. Comme $A \cap B \neq \emptyset$, $\exists a \in A \cap B$. Soit $r \in \mathcal{D}_{A \cup B}$, $\exists (x,y) \in (A \cup B)^2$ tels que $r = |y - x|$. Étudions les différents cas possibles :

- $x \in A$ et $y \in A$: $|y - x| \leq \delta(A) \leq \delta(A) + \delta(B)$.
- $x \in B$ et $y \in B$: de même, $|y - x| \leq \delta(B) \leq \delta(A) + \delta(B)$.
- $x \in A$ et $y \in B$: Utilisons l'inégalité triangulaire :

$$|y - x| = |(y - a) + (a - x)| \leq |y - a| + |a - x|$$

Comme $(a,y) \in B^2$, $|y - a| \leq \delta(B)$. Comme $(a,x) \in A^2$, $|a - x| \leq \delta(A)$. Par conséquent, $|y - x| \leq \delta(A) + \delta(B)$.

- $x \in B$ et $y \in A$: ce cas est le symétrique du précédent.

Dans tous les cas, on a montré que $|y - x| \leq \delta(A) + \delta(B)$. Par passage à la borne supérieure, il vient que $\delta(A \cup B) \leq \delta(A) + \delta(B)$.

e.
- $f(A)$ est non vide : puisque A est non vide, $\exists a \in A$. Posons $y = f(a)$. D'après la définition de l'image directe, $y \in f(A)$ ce qui montre que $f(A) \neq \emptyset$.
- $f(A)$ est bornée : comme $A \neq \emptyset$, $\exists a \in A$. Comme A est bornée, $\exists M > 0$ tel que $\forall x \in A$, $|x| \leq M$. Posons $M' = 2M + |f(a)|$. Soit alors $y \in f(A)$. D'après la définition de l'image directe, $\exists x \in A$ tel que $y = f(x)$. Alors $|y| = |f(x)| = |(f(x) - f(a)) + f(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leq |x - a| + |f(a)| \leq |x| + |a| + |f(a)| \leq 2M + |f(a)| = M'$.

f. Soit $r \in \mathcal{D}_{f(A)}$, $\exists (X,Y) \in f(A)^2$ tels que $r = |Y - X|$. D'après la définition de l'image directe, $\exists (x,y) \in A^2$ tels que $X = f(x)$ et $Y = f(y)$. Alors $r = |Y - X| = |f(y) - f(x)| \leq |y - x| \leq \delta(A)$ puisque $|y - x| \in \mathcal{D}_A$. Par passage à la borne supérieure, on en déduit que $\delta\big(f(A)\big) \leq \delta(A)$.

$\boxed{Q\ 8}$

a. Comme f n'est pas la fonction nulle, il existe $\alpha \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(\alpha) \neq 0$. Alors, puisque

$$f(\alpha) = f(1.\alpha) = f(1).f(\alpha)$$

on en déduit que

$$f(\alpha)\,[f(1) - 1] = 0$$

et puisque $f(\alpha) \neq 0$, on obtient que $f(1) = 1$.
Puisque d'après $(\star)$,

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$$

on obtient que $f(0) = 0$.

b. Montrons la propriété par récurrence sur n.

$$\mathcal{P}(n) : f(n) = n$$

$\mathcal{P}(0)$ est vraie d'après a).
$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$: en utilisant $(\star)$ et $\mathcal{P}(n)$:

$$f(n+1) = f(n) + f(1) = f(n) + 1 = n + 1$$

c. Soit $r \in \mathbb{Q}^+$. Il existe $(p,q) \in \mathbb{Q}^2$ $(p \geq 0, q > 0)$ tels que

$$r = \frac{p}{q}$$

Alors, en utilisant $(\star\star)$:

$$qf\left(\frac{p}{q}\right) = f(q).f\left(\frac{p}{q}\right) = f(p) = p$$

On en tire donc que

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}$$

d. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Ecrivons en utilisant $(\star\star)$:

$$f(x) = f\left(\sqrt{x}.\sqrt{x}\right) = \left[f\left(\sqrt{x}\right)\right]^2 \geq 0$$

e. Soit $(x,y) \in {\mathbb{R}^+}^2$, tels que $x \leq y$. Comme $y - x \geq 0$, d'après d), on en déduit que

$$f(y-x) \geq 0$$

et d'après $(\star)$ que

$$f(y) = f(y-x+x) = f(y-x) + f(x) \geq f(x)$$

Donc f est croissante.

f. Par l'absurde, si $f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^+}$, il existerait $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) \neq x$. Distinguons les deux cas possibles:

(a) $x < f(x)$: Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ vérifiant

$$x < r < f(x)$$

Comme d'après c), $f(r) = r$, on aurait puisque f est croissante:

$$f(x) \leq f(r)$$

et donc

$$x < r < f(x) \leq f(r) = r$$

ce qui est absurde.

(b) $f(x) < x$: ce cas se traite de la même façon.