Ex 1 `Facile, cours`

On considère une parabole de foyer F et un point M de cette parabole. Montrer que la projection orthogonale de F sur la tangente en M est située sur la tangente au sommet.

Ex 2 `Facile, cours`

Un point M d'une hyperbole se projette en H et H' sur les deux asymptotes. Montrer que le produit $\|\overrightarrow{MH}\|\|\overrightarrow{MH'}\|$ est constant.

Ex 3 `Facile`

On considère l'ellipse d'équation réduite

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

À un point M de l'ellipse différent des sommets, on fait correspondre le point M' symétrique par rapport à l'axe (Ox). On note P le point d'intersection de la droite (OM') avec la normale à l'ellipse en M. Déterminer le lieu du point P lorsque M décrit l'ellipse.

Ex 4 `Facile`

On considère une ellipse de grand axe (AA'). Soit M_0 un point de l'ellipse. La tangente en M_0 coupe les tangentes en A et A' aux points P et P'. Montrer que $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{A'P'}$ est constant.

Ex 5 `Facile`

On considère un point M d'une ellipse de centre 0. On lui associe un point P tel que la tangente en P à l'ellipse soit parallèle à la droite (OM).

a. Montrer que l'aire du triangle (OPM) est constante et la calculer.
b. Montrer que $\|\overrightarrow{OM}\|^2+\|\overrightarrow{OP}\|^2$ est constante.

Ex 6 `Moyen`

On considère la parabole d'équation $y^2=2px$ et un point $A\left|\begin{matrix}a^2/2p\\ a\end{matrix}\right.$ de cette parabole. On considère deux points de la parabole $M\left|\begin{matrix}m^2/2p\\ m\end{matrix}\right.$ et $N\left|\begin{matrix}n^2/2p\\ n\end{matrix}\right.$. On note $\alpha=m+n$ et $\beta=mn$.

a. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α et β pour que les droites (AM) et (AN) soient orthogonales.
b. Montrer que lorsque M, N varient sur la parabole, (avec la condition d'orthogonalité précédente), la droite (MN) passe par un point fixe Q à déterminer.
b. À chaque point A de la parabole on peut donc associer le point Q. Déterminer le lieu de Q lorsque A varie.

Ex 7 `Moyen`

On considère une ellipse de foyers F et F' et un point M variable sur cette ellipse. On note T_M la tangente à l'ellipse au point M Montrer que $d(F,T_M)\times d(F',T_M)$ est constante.

Ex 8 `Facile, cours`

On considère dans le repère canonique la courbe d'équation

$$25x^2-14xy+25y^2+64x-64y-224=0$$

Déterminer sa nature, puis tracer cette courbe en précisant le centre et l'excentricité.

Ex 9 `Facile, cours`

On considère la courbe d'équation

$$3x^2+4xy-12x+16=0$$

dans le repère canonique. Montrer (avec le moins de calculs possibles) que cette courbe est une hyperbole dont on précisera les demi-axes ainsi que le centre.

Ex 10 `Moyen, intéressant`

On considère un polynôme de degré 3 :

$$P=X^3+\lambda X^2+\mu X+\delta$$

et la courbe formé des points $M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ d'équation

$$\mathcal{C}:\ P(y) = P(x)$$

Montrer que :

a. Si $\lambda^2 - 3\mu < 0$, $\mathcal{C}$ est une droite à préciser.

b. Si $\lambda^2 - 3\mu > 0$, $\mathcal{C}$ est la réunion d'une droite et d'une conique. On montrera que l'excentricité de cette conique est indépendante de P.

Corrigé des exercices

$\boxed{Q\ 1}$ Dans un repère orthonormé adapté, la parabole a pour équation $\mathcal{P} :\ y^2 = 2px$, le foyer a pour coordonnées $F\begin{vmatrix} p/2 \\ 0 \end{vmatrix}$. Soit un point $M\begin{vmatrix} t^2/2p \\ t \end{vmatrix}$ de la parabole. La tangente en M est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{t}\begin{vmatrix} t/p \\ 1 \end{vmatrix}$ et la normale par le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{vmatrix} -1 \\ t/p \end{vmatrix}$. L'équation de la tangente en M est donc

$$(T) :\ x - \frac{t}{p}y + \frac{t^2}{2p} = 0$$

Notons H le projeté orthogonal de F sur (T). Puisque $H = F + \lambda\overrightarrow{n}$,

$$\begin{cases} x_H &= p/2 - \lambda \\ y_H &= \lambda t/p \end{cases}$$

et puisque H est sur (T), on trouve que $\lambda = p/2$ d'où $\boxed{H\begin{vmatrix} 0 \\ t/2 \end{vmatrix}}$.

$\boxed{Q\ 2}$ Dans le repère orthonormé adéquat, l'équation de l'hyperbole est $\mathcal{H} :\ \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ et les deux asymptotes ont pour équations $y = b/ax$ et $y = -b/ax$ ou encore :

$$\mathcal{D}_1 :\ bx + ay = 0 \quad \mathcal{D}_2 :\ bx - ay = 0$$

et les vecteurs $\overrightarrow{n_1}\begin{vmatrix} b \\ a \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{n_2}\begin{vmatrix} b \\ -a \end{vmatrix}$ sont normaux à ces droites. Paramétrons un point M de la branche droite de l'hyperbole : $M\begin{vmatrix} a\operatorname{ch} t \\ b\operatorname{sh} t \end{vmatrix}$. En écrivant que $H = M + \lambda\overrightarrow{n_1}$, on trouve que $\lambda = -\dfrac{ab}{a^2+b^2}e^t$ puis que $\overrightarrow{MH} = -\dfrac{ab}{a^2+b^2}e^t\begin{vmatrix} b \\ a \end{vmatrix}$. De la même façon, on trouve que $\overrightarrow{MH'} = -\dfrac{ab}{a^2+b^2}e^{-t}\begin{vmatrix} b \\ -a \end{vmatrix}$ et on calcule finalement

$$\boxed{\|\overrightarrow{MH}\|\|\overrightarrow{MH'}\| = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}}$$

qui est bien indépendant de t. Par symétrie, on obtient le même résultat si M se trouve sur la branche gauche de l'hyperbole.

$\boxed{Q\ 3}$ En paramétrant l'ellipse, $M\begin{vmatrix} a\cos t \\ b\sin t \end{vmatrix}$, le vecteur $\overrightarrow{t}\begin{vmatrix} -a\sin t \\ b\cos t \end{vmatrix}$ est tangent en M à l'ellipse et le vecteur $\overrightarrow{n}\begin{vmatrix} b\cos t \\ a\sin t \end{vmatrix}$ est donc normal. L'équation cartésienne de la droite (OM') est :

$$b\sin tx + a\cos ty = 0$$

Puisque le point P est sur la normale, $P = M + \lambda\overrightarrow{n}$ et puisque $P \in (OM')$, on trouve que $\lambda = -\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$ et enfin

$$\boxed{\begin{cases} x_P &= \dfrac{a(a^2-b^2)}{a^2+b^2}\cos t \\ y_P &= -\dfrac{b(a^2-b^2)}{a^2+b^2}\sin t \end{cases}}$$

On en déduit que le point P décrit l'ellipse homothétique (privée de ses sommets) de l'ellipse initiale avec un rapport d'homothétie de $\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

$\boxed{Q\ 4}$ L'ellipse dans un bon repère orthonormé a pour équation réduite

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

et $A\begin{vmatrix}-a\\0\end{vmatrix}$, $A'\begin{vmatrix}a\\0\end{vmatrix}$. Si $M_0\begin{vmatrix}x_0\\y_0\end{vmatrix}$, l'équation cartésienne de la tangente en M_0 est

$$T_{M_0} : \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

On trouve alors (il faut que $M_0 \neq A,A'$) $P\begin{vmatrix}-a\\ \dfrac{b^2}{y_0}(1+\dfrac{x_0}{a})\end{vmatrix}$, $P'\begin{vmatrix}a\\ \dfrac{b^2}{y_0}(1-\dfrac{x_0}{a})\end{vmatrix}$ et ensuite $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{A'P'} = \boxed{b^2}$.

$\boxed{Q\ 5}$ Dans un repère orthonormé adéquat de centre O, l'ellipse a pour équation cartésienne $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. Paramétrons l'ellipse : $M\begin{vmatrix}a\cos t\\b\sin t\end{vmatrix}$. Si le point P a pour paramètre u, $P\begin{vmatrix}a\cos u\\b\sin u\end{vmatrix}$ et le vecteur $\overrightarrow{F}'(u)\begin{vmatrix}-a\sin u\\b\cos u\end{vmatrix}$ dirige la tangente en P. La condition pour que la tangente en P soit parallèle à (OM) s'écrit $\mathrm{Det}(\overrightarrow{F}'(u),\overrightarrow{OM}) = 0$, ce qui donne $\cos(u-t) = 0$. Par conséquent, $u = t + \pi/2 + k\pi$ c'est à dire $u = t + \pi/2$ ou alors $u = t - \pi/2$. Si par exemple $u = t + \pi/2$, $P\begin{vmatrix}-a\sin t\\b\cos t\end{vmatrix}$ et alors

a.

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\mathrm{Det}(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OP}) = \boxed{\frac{ab}{2}}$$

b.

$$\|\overrightarrow{OM}\|^2 + \|\overrightarrow{OP}\|^2 = \boxed{a^2 + b^2}$$

Remarque : on vérifie que ces valeurs sont correctes en prenant pour M l'un des sommets de l'ellipse.

$\boxed{Q\ 6}$

a. En traduisant $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = 0$, on trouve que $(m+a)(n+a) + 4p^2 = 0$ c'est à dire

$$\boxed{\beta + a\alpha + a^2 + 4p = 0}$$

b. L'équation cartésienne de la droite (MN) est :

$$2px - \alpha y + \beta = 0$$

et en utilisant la condition d'orthogonalité, cette équation devient

$$\alpha(y+a) - 2px + a^2 + 4p^2 = 0$$

on voit donc que cette droite passe par le point fixe

$$\boxed{Q\begin{vmatrix}\dfrac{a^2+4p^2}{2p}\\ -a\end{vmatrix}}$$

b. En éliminant le paramètre a, on voit que le point Q se déplace sur la parabole d'équation

$$\boxed{y^2 = 2p(x - 2p)}$$

c'est à dire la parabole initiale translatée du vecteur $2p\overrightarrow{i}$.

$\boxed{Q\ 7}$ Dans un bon repère orthonormé, l'équation cartésienne de l'ellipse est :

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

avec $a > b > 0$. Si $M\begin{vmatrix}x_0\\y_0\end{vmatrix}$, l'équation cartésienne de la tangente en M est :

$$T_M : \frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} - 1 = 0$$

Puisque $F\begin{vmatrix}-c\\0\end{vmatrix}$, $F'\begin{vmatrix}c\\0\end{vmatrix}$ où $c^2=a^2-b^2$, on calcule

$$\begin{aligned}d(F,T_M)\times d(F',T_M) &= \frac{|cx_0/a^2-1|}{\sqrt{x_0^2/a^4+y_0^2/b^4}}\times\frac{|cx_0^2/a^2+1|}{\sqrt{x_0^2/a^4+y_0^2/b^4}}\\ &= \frac{|c^2x_0^2/a^4-1|}{x_0^2/a^4+y_0^2/b^4}\\ &= \frac{|x_0^2/a^2-b^2x_0^2/a^4-1|}{x_0^2/a^2+y_0^2/b^2} \qquad (\text{ car } c^2=a^2-b^2)\\ &= \frac{b^2x_0^2/a^4+y_0^2/b^2}{x_0^2/a^4+y_0^2/b^2} \quad (\text{ car } x_0^2/a^2+y_0^2/b^2=1)\\ &= b^2\end{aligned}$$

$\boxed{Q\ 8}$ On calcule le discriminant $\Delta=25^2-7^2>0$. La courbe est une ellipse ou alors réduite à un point ou vide. Par un changement d'origine du repère défini par les formules

$$\begin{cases}x &= X+\alpha\\ y &= Y+\beta\end{cases}$$

pour éliminer les termes en x et y, on choisit α et β avec

$$\begin{cases}25\alpha-7\beta &= -32\\ -7\alpha+25\beta &= 32\end{cases}$$

c'est à dire $\alpha=-1$ et $\beta=1$. L'origine du nouveau repère est $\Omega\begin{vmatrix}-1\\1\end{vmatrix}$ et dans ce nouveau repère l'équation devient

$$25x^2-14xy+25y^2=288$$

On effectue ensuite une rotation des axes d'angle θ définie par les formules de changement de repère

$$\begin{cases}x &= \cos\theta X-\sin\theta Y\\ y &= \sin\theta X+\cos\theta Y\end{cases}$$

et pour annuler le terme en xy, on choisit $\cos(2\theta)=0$, c'est à dire $\theta=\pi/4$. L'équation devient alors dans ce nouveau repère

$$\frac{X^2}{4^2}+\frac{Y^2}{3^2}=1$$

c'est une ellipse d'excentricité $e=1/4$ et de centre Ω, On trace sans peine cette ellipse.

$\boxed{Q\ 9}$ Le discriminant vaut $\Delta=-40<0$. Cette courbe est soit une hyperbole, soit la réunion de deux droites sécantes. Par un changement d'origine de repère défini par les formules

$$\begin{cases}x &= X+\alpha\\ y &= Y+\beta\end{cases}$$

pour éliminer les termes linéaires, on choisit α et β vérifiant

$$\begin{cases}3\alpha+2\beta &= 6\\ \alpha &= 0\end{cases}$$

c'est à dire $\alpha=0$ et $\beta=3$. Le centre du nouveau repère a pour coordonnées $\Omega\begin{vmatrix}0\\3\end{vmatrix}$. Par un changement de repère orthonormé (rotation des axes), on sait que l'on peut trouver un angle θ tel que dans le nouveau repère, la courbe aît pour équation

$$Ax^2+Cy^2=16$$

mais puisque

$$\begin{cases} AC & = \Delta = -4 \\ A + C & = 3 \end{cases}$$

A et C sont racines du trinôme $T^2 - 3T - 4 = 0$, c'est à dire $\{A,C\} = \{-1,4\}$. Les deux équations possibles de la courbe sont donc

$$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1 \text{ ou } -\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1$$

On reconnaît une hyperbole de demi-axes $\boxed{4}$ et $\boxed{2}$. le centre est le point $\boxed{\Omega \left| \begin{matrix} 0 \\ 3 \end{matrix} \right.}$.

$\boxed{Q\ 10}$ L'équation de $\mathcal{C}$ s'écrit en factorisant par $(y - x)$:

$$[y - x](x^2 + xy + y^2 + \lambda(x + y) + \mu) = 0$$

La courbe contient la droite d'équation $y = x$ (première bissectrice). Intéressons-nous à la courbe du second degré. Par un changement de repère défini par les formules

$$\begin{cases} x & = X + \alpha \\ y & = Y + \beta \end{cases}$$

on peut annuler les termes en x et y en choisissant α et β solutions du système

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta & = -\lambda \\ \alpha + 2\beta & = -\lambda \end{cases}$$

c'est à dire $\alpha = \beta = -\lambda/3$. Dans ce nouveau repère, l'équation devient

$$X^2 + XY + Y^2 = \frac{\lambda^2 - 3\mu}{3}$$

Si $\lambda^2 - 3\mu < 0$, cette courbe est vide. Sinon, on sait que par une rotation des axes, on peut trouver un nouveau repère dans lequel l'équation devient

$$AX^2 + BY^2 = \frac{\lambda^2 - 3\mu}{3}$$

avec $\Delta = AB = 1 - 1/4 = 3/4 > 0$ et $A + B = 2$. On reconnaît une ellipse. A et B sont racines du trinôme $4T^2 - 8T + 3 = 0$, c'est à dire $\{3/2,1/2\}$. L'équation réduite de l'ellipse s'écrit

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ avec } \begin{cases} a^2 & = \dfrac{\lambda^2 - 3\mu}{3A} \\ b^2 & = \dfrac{\lambda^2 - 3\mu}{3B} \end{cases}$$

Pour avoir $a > b$, on prend $A < B$. Alors l'excentricité vaut $e = c/a = \sqrt{1 - b^2/a^2} = \sqrt{1 - A/B} = \boxed{\sqrt{2/3}}$.