Ex 1 `Moyen, à faire`

On considère la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{t^2+1}{2t} \\ y(t) &= \dfrac{2t-1}{t^2} \end{cases}$$

a. Faire l'étude de la courbe en précisant la tangente au point stationnaire et les droites asymptotes éventuelles.
b. Montrer qu'il existe trois réels $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $y(t) - [ax^2(t) + bx(t) + c] \xrightarrow[t\to 0]{} 0$. En déduire l'existence d'une parabole asymptote à la courbe.
c. En effectuant un changement de repère, tracer sur la même figure cette parabole et le support de l'arc paramétré.

Ex 2 `Moyen, intéressant`

Construire la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{t^2-1} \\ y(t) = \dfrac{t^2}{t-1} \end{cases}$$

Déterminer ensuite les coordonnées du point double I et montrer que les tangentes en I sont orthogonales.

Ex 3 `Facile, symétries`

Étudier la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = \tan t + \sin t \\ y(t) = \dfrac{1}{\cos t} \end{cases}$$

Ex 4 `Moyen`

Tracer la courbe polaire

$$\rho = 1 + \tan \frac{\theta}{2}$$

On précisera les coordonnées du point double.

Ex 5 `Facile, symétries`

Tracer la courbe polaire d'équation

$$\rho = \cos(3\theta)$$

Ex 6 `Facile`

Construire la courbe polaire d'équation

$$\rho = 1 - \tan 2\theta$$

On donnera l'équation cartésienne des asymptotes.

Ex 7 `Moyen`

On considère l'astroïde, c'est à dire la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} x(t) &= a\cos^3 t \\ y(t) &= a\sin^3 t \end{cases}$$

En un point $M(t)$ de cette courbe, on associe le projeté orthogonal $H(t)$ de O sur la normale issue de M.

a. Déterminer les coordonnées de $H(t)$ en fonction de t.
b. En déduire une équation polaire de la courbe décrite par H
c. Tracer cette courbe.

Corrigé des exercices

$\boxed{Q\ 1}$

a.
- $D_x = D_y = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Il n'y a pas de symétries apparentes. Pour les calculs, on a intérêt à écrire $x(t) = \dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{2t}$ et $y(t) = \dfrac{2}{t} - \dfrac{1}{t^2}$.
- On calcule pour $t \neq 0$,
$$x'(t) = \frac{(t-1)(t+1)}{2t^2} \qquad y'(t) = -2\frac{t-1}{t^3}$$
et on en déduit les variations de x et y :

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x'(t)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$y'(t)$		$-$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
$x(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	0	$\searrow$	-3	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

- Pour l'étude du point stationnaire $M(1)$, on forme
$$m(t) = \frac{y(t)-y(1)}{x(t)-x(1)} = -\frac{2}{t} \xrightarrow[t\to 1]{} -2$$
On en déduit qu'il y a une tangente de pente -2 au point stationnaire $M(1)\left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right.$.
- Puisque $y(t) \xrightarrow[t\to\pm\infty]{} 0$, la droite d'équation $y = 0$ est asymptote lorsque $t \to \pm\infty$ et le tableau de variations donne la position de la courbe par rapport à cette asymptote.
- Branche infinie $t \to 0$: on calcule $y(t)/x(t) = \dfrac{2(2t-1)}{t(t^2+1)} \xrightarrow[t\to 0]{} \infty$. Il n'y a donc pas de droite asymptote mais une branche parabolique (Oy).
- En calculant $y(t)/x^2(t) = \dfrac{4(2t-1)}{(t^2+1)^2} \xrightarrow[t\to 0]{} -4$, puis $y(t)+4x^2(t) = \dfrac{2}{t}+t^2+2$, et $y(t)+4x^2(t)-4x(t) = 2-2t+t^2 \xrightarrow[t\to 0]{} 2$,
$$y(t) - [-4x^2(t)+4x(t)+2] = -2t(1-t/2) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$$
On en déduit (faire un dessin comme dans le cours pour les droites asymptotes) que $d(M(t),\mathcal{P}) \xrightarrow[t\to 0]{} 0$. Donc la parabole d'équation $y = -4x^2+4x+2$ est asymptote à la courbe, et le signe de $-2t(1-t/2)$ donne la position de la courbe par rapport à cette parabole. En écrivant l'équation de la parabole sous la forme
$$y - 3 = -4(x-1/2)^2$$
avec le changement de repère défini par les formules $X = x - 1/2$, $Y = y - 3$, l'équation devient $Y = -4X^2$ et donc le sommet de la parabole est le point $\left|\begin{matrix}1/2\\3\end{matrix}\right.$.

$\boxed{Q\ 2}$

1. **Domaine de définition :** $D_x = \mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ et $D_y = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.
2. **Restriction de l'intervalle d'étude :** Pas de restrictions apparentes.
3. **Variations :** On trouve que
$$x'(t) = -\frac{t^2+1}{(t^2-1)^2}, \quad y'(t) = \frac{t(t-2)}{(t-1)^2}$$

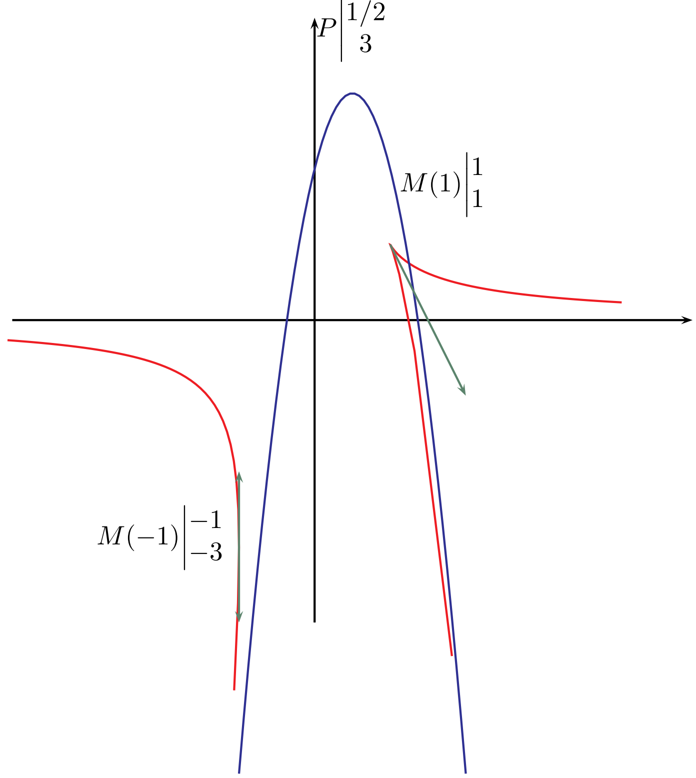

FIG. 1 – $x(t) = \dfrac{t^2+1}{2t}$, $y(t) = \dfrac{2t-1}{t^2}$

t	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$x'(t)$		$-$	$\Vert$		$-$		$\Vert$		$-$		
$y'(t)$			$+$		0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$x(t)$	0	$\searrow$	$-\infty\ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty\ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	$2/3$	$\searrow$	0
$y(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-1/2$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty\ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Le tableau de variations montre deux points ordinaires à tangente horizontale : $M(0) = (0,0)$ et $M(2) = (2/3,4)$. Il n'y a pas de points stationnaires.

4. **Branches infinies :** Lorsque $t \to \pm\infty$, le tableau de variations montre que la droite (Ox) est asymptote, et on lit la position de la courbe par rapport à cette asymptote. De même, lorsque $t \to -1$, la droite d'équation $y = -1/2$ est asymptote au vu du tableau de variations. Pour l'étude de la branche infinie, lorque $t \to 1$, en formant

$$\frac{y(t)}{x(t)} = t(t+1) \xrightarrow[t\to 1]{} 2$$
$$y(t) - 2x(t) = \frac{t(t+2)}{t+1} \xrightarrow[t\to 1]{} 3/2$$
$$y(t) - 2x(t) - 3/2 = \frac{(t-1)(2t+3)}{2(t+1)} \xrightarrow[t\to 1]{} 0$$

on trouve que la droite d'équation $y = 2x + 3/2$ est asymptote. Lorsque $t \to 1^-$, la courbe arrive à gauche en dessous de la droite et lorsque $t \to 1^+$, la courbe arrive sur l'asymptote à droite au dessus.

5. **Coordonnées du point double :** Cherchons le point double $M = M(t_1) = M(t_2)$ avec $t_1 \neq t_2$. On doit avoir
$$\begin{cases} t_1(t_2^2-1) &= t_2(t_1^2-1) \\ t_1^2(t_2-1) &= t_2^2(t_1-1) \end{cases}$$

et en mettant $(t_1 - t_2)$ en facteur,
$$\begin{cases} t_1t_2 + 1 & = 0 \\ t_1t_2 - (t_1 + t_2) & = 0 \end{cases}$$
Par conséquent, $t_1t_2 = -1$ et $t_1 + t_2 = -1$. Les deux valeurs t_1 et t_2 sont racines du trinôme
$$T^2 + T - 1 = 0$$
Le point double a pour coordonnées
$$x = \frac{t_1}{t_1^2 - 1} = \frac{t_2}{t_2^2 - 1} = \frac{t_1 - t_2}{t_1^2 - t_2^2} = \frac{1}{t_1 + t_2} = -1$$
et de même, $y = -1$. $I = (-1, -1)$.

6. **Tangentes orthogonales au point double :** Les deux tangentes au point doubles sont dirigées par les vecteurs $\overrightarrow{F'}(t_1)$ et $\overrightarrow{F'}(t_2)$ (c'est un point ordinaire). Il suffit de montrer que ces deux vecteurs sont orthogonaux. Calculons leur produit scalaire :
$$s = \left(\overrightarrow{F'}(t_1) \mid \overrightarrow{F'}(t_2)\right) = x'(t_1)x'(t_2) + y'(t_1)y'(t_2)$$
On calcule
$$s = \frac{(t_1^2+1)(t_2^2+1)}{(t_1^2-1)^2(t_2^2-1)^2} + \frac{t_1t_2(t_1-2)(t_2-2)}{(t_1-1)^2(t_2-1)^2} = \frac{(t_1t_2)^2 + (t_1^2+t_2^2) + 1}{\left[(t_1t_2)^2 - (t_1^2+t_2^2) + 1\right]^2} + \frac{t_1t_2\left[t_1t_2 - 2(t_1+t_2) + 4\right]}{\left[t_1t_2 - (t_1+t_2) + 1\right]^2}$$
Mais $t_1^2 + t_2^2 = (t_1 + t_2)^2 - 2t_1t_2 = 3$, et finalement
$$s = \frac{1+3+1}{(1-3+1)^2} - \frac{-1+2+4}{(-1+1+1)^2} = 5 - 5 = 0$$
Ce qui montre que les deux tangentes sont orthogonales.

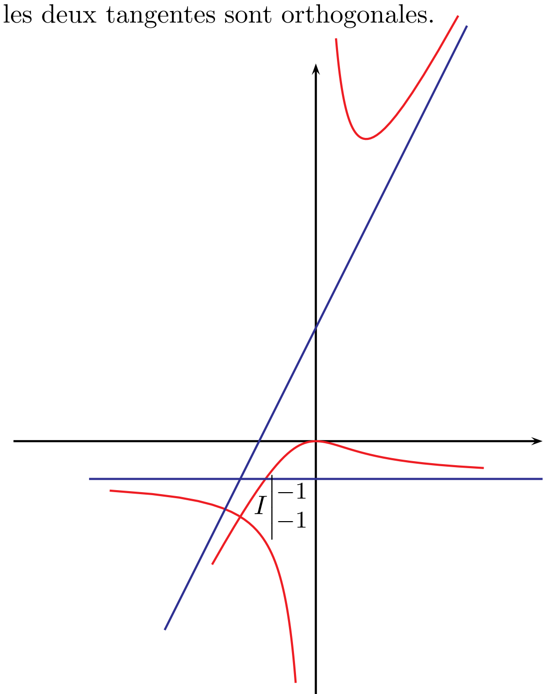

FIG. 2 – $x(t) = \dfrac{t}{t^2 - 1}$, $y(t) = \dfrac{t^2}{t - 1}$

$\boxed{Q\ 3}$

1. Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2; k \in \mathbb{Z}\}$.
2. **Restriction de l'intervalle d'étude**. On remarque que $x(t + 2\pi) = x(t)$ et $y(t + 2\pi) = y(t)$. Donc $M(t+2\pi) = M(t)$. Il suffit de faire l'étude de la courbe sur un intervalle $[\alpha, \alpha+2\pi]$. De plus, $x(-t) = -x(t)$ et $y(-t) = y(t)$. Le point $M(-t)$ est donc le symétrique du point $M(t)$ par rapport à l'axe Oy. Il suffit donc de faire l'étude sur $[0, \pi]$ et de compléter le tracé de la courbe par une symétrie par rapport à la droite Oy.

3. **Variations**. On calcule
$$x'(t) = \frac{\cos^3 t + 1}{\cos^2 t} \quad y'(t) = \frac{\sin t}{\cos^2 t}$$
On remarque un point stationnaire $M(\pi)$ et une branche infinie en $t = \pi/2$. Les fonctions sont croissantes sur chacun des intervalles $[0,\pi/2[$ et $]\pi/2,\pi]$.
4. **Étude du point stationnaire**. Formons
$$m(t) = \frac{y(t) - y(\pi)}{x(t) - x(\pi)} = \frac{1}{\sin t} \xrightarrow[t \to \pi]{} \pm\infty$$
Il y a donc une tangente verticale au point stationnaire $M(\pi)\left|\begin{array}{l} 0 \\ -1 \end{array}\right.$.
5. **Étude de la branche infinie**. Lorsque $t \to \pi/2$, formons
$$\frac{y(t)}{x(t)} = \frac{1}{\sin t(\cos t + 1)} \xrightarrow[t \to \pi/2]{} 1$$
Ensuite, calculons
$$\alpha(t) = y(t) - x(t) = \frac{\sin t + \sin t \cos t - 1}{\cos t}$$
En posant $h = t - \pi/2$, cherchons la limite lorsque $h \to 0$ de
$$\beta(t) = \alpha(\pi/2 + t) = \frac{\cos h - 1 - \sin h \cos h}{-\sin h} = \frac{1 - \cos h}{\sin h} + \cos h = \frac{\sin(h/2)}{\cos(h/2)} + \cos h \xrightarrow[h \to 0]{} 1$$
On en déduit que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe.

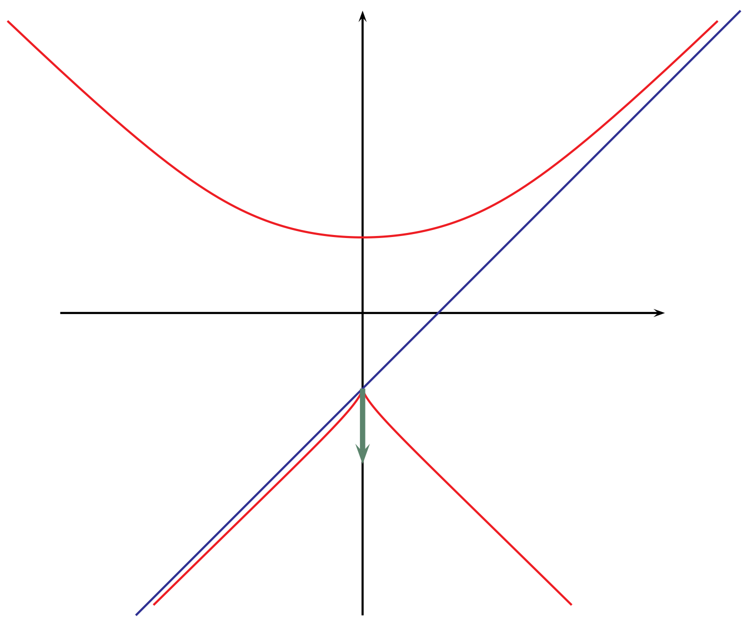

FIG. 3 – $x(t) = \tan t + \sin t,\ y(t) = \dfrac{1}{\cos t}$

$\boxed{Q\ 4}$

1. **Domaine de définition de ρ :** La fonction ρ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.
2. **Restriction de l'intervalle d'étude :** Puisque $\rho(\theta + 2\pi) = \rho(\theta)$, $M(\theta + 2\pi) = M(\theta)$ et il suffit donc de faire l'étude sur $[0,2\pi]$.
3. **Tableau de signe de ρ :** Il est clair que ρ est croissante, et s'annule en $3\pi/2$.

θ	0		$\pi/2$		π			$3\pi/2$		2π
$\rho(\theta)$	1	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ||	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1

4. **Passage au pôle :** le passage au pôle correspond à un point ordinaire, à tangente verticale (ρ change de signe).
5. **Branche infinie :** lorsque $\theta \to \pi$. Il y a une direction asymptotique horizontale. Pour chercher une droite asymptote, étudions $y(\theta) = \rho(\theta)\sin\theta$. En posant $u = \theta - \pi$,

$$\widetilde{y}(u) = y(\pi + u) = -\sin u + 2\cos^2(u/2) \xrightarrow[u \to 0]{} 2$$

   La droite d'équation $y = 2$ est donc asymptote à la courbe.
6. **Point double :** On voit sur le dessin que le point double vérifie $M(\theta_1) = M(\theta_1 + \pi)$ avec $\theta_1 \in [0,\pi/2]$, c'est à dire

$$\rho(\theta_1) = -\rho(\theta_1 + \pi)$$

   En posant $t = \tan(\theta_1/2)$, on obtient

$$t^2 + 2t - 1 = 0$$

   c'est à dire $t = \sqrt{2} - 1$ (pour avoir $\theta_1 \in [0,\pi/2]$). Alors si le point double a pour coordonnées $I\left|\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}\right.$ on trouve, puisque $\rho(\theta_1) = \sqrt{2}$, que :

$$x_1 = \rho(\theta_1)\cos(\theta_1) = \sqrt{2}\frac{1-t^2}{1+t^2} = 1$$

$$y_1 = \rho(\theta_1)\sin(\theta_1) = \sqrt{2}\frac{2t}{1+t^2} = 1$$

   Donc le point double est $I\left|\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix}\right.$.

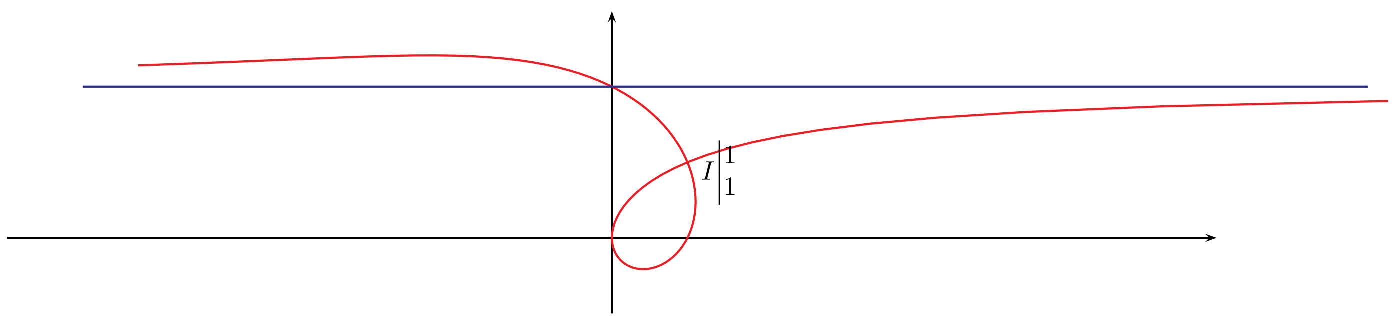

FIG. 4 – $\rho = 1 + \tan\theta/2$

$\boxed{Q\ 5}$ **Restriction de l'intervalle d'étude :**

- $\rho(\theta + 2\pi/3) = \rho(\theta)$, donc $M(\theta + 2\pi/3)$ est l'image du point $M(\theta)$ par la rotation de centre 0 et d'angle $2\pi/3$. Il suffit de faire l'étude sur $[\alpha,\alpha + 2\pi/3]$;
- $\rho(\theta + \pi/3) = -\rho(\theta)$, donc le point $M(\theta + \pi/3)$ est l'image du point $M(\theta)$ par la rotation d'angle $-2\pi/3$. Il suffit de faire l'étude sur un intervalle de longueur $\pi/3$;
- $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$, donc le point $M(-\theta)$ est le symétrique du point $M(\theta)$ par rapport à l'axe Ox.

On fait donc l'étude sur $[0,\pi/6]$, et on complète la courbe par symétrie par rapport à $(0x)$, puis par rotations d'angle $-2\pi/3$.

θ	0		$\pi/6$
$\rho(\theta)$	1	$\searrow$	0

La fonction ρ est décroissante sur $[0,\pi/6]$ et s'annule en $\pi/6$. Le passage au pôle est un point ordinaire (ρ change de signe). Il n'y a pas de branches infinies.

$\boxed{Q\ 6}$

- **Domaine de définition :** $D_\rho = \mathbb{R} \setminus \{\frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4};\ k \in \mathbb{Z}\}$.

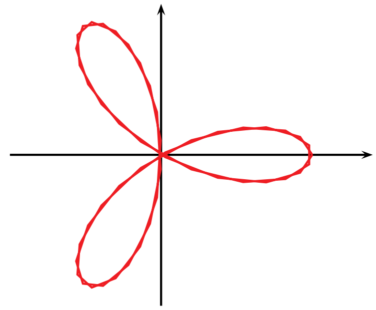

FIG. 5 – $\rho = \cos(3\theta)$

- **Restriction de l'intervalle d'étude :** $\rho(\theta+\pi/2) = \rho(\theta)$. Par conséquent, le point $M(\theta+\pi/2)$ se déduit du point $M(\theta)$ par une rotation de centre O et d'angle $\pi/2$. Il suffit de faire l'étude pour $\theta \in [0,\pi/2]$ et de compléter la courbe par quatre rotations d'angle $\pi/2$.
- **Signe de ρ :** tableau de signe :

θ	0		$\pi/8$		$\pi/4$		$\pi/2$
$\rho(\theta)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	1

- **Passage au pôle :** Comme ρ s'annule en changeant de signe, les passages au pôle sont des points ordinaires, la tangente étant dirigée par la droite faisant un angle $\pi/8$ avec l'axe des x.
- **Branche infinie :** faisons l'étude dans le repère polaire $\mathcal{R} = (0, \overrightarrow{u}(\pi/4), \overrightarrow{v}(\pi/4))$. En notant $h = \theta - \pi/4$, et $X(h)$, $Y(h)$ les coordonnées du point M dans le repère polaire,

$$Y(h) = \rho(\pi/4+h)\sin h = \sin h + \cos(2h) \xrightarrow[h\to 0]{} 1$$

Par conséquent, la droite d'équation $Y = 1$ dans le repère polaire est asymptote. Son équation cartésienne dans le repère canonique est $\boxed{y = x + \sqrt{2}}$.

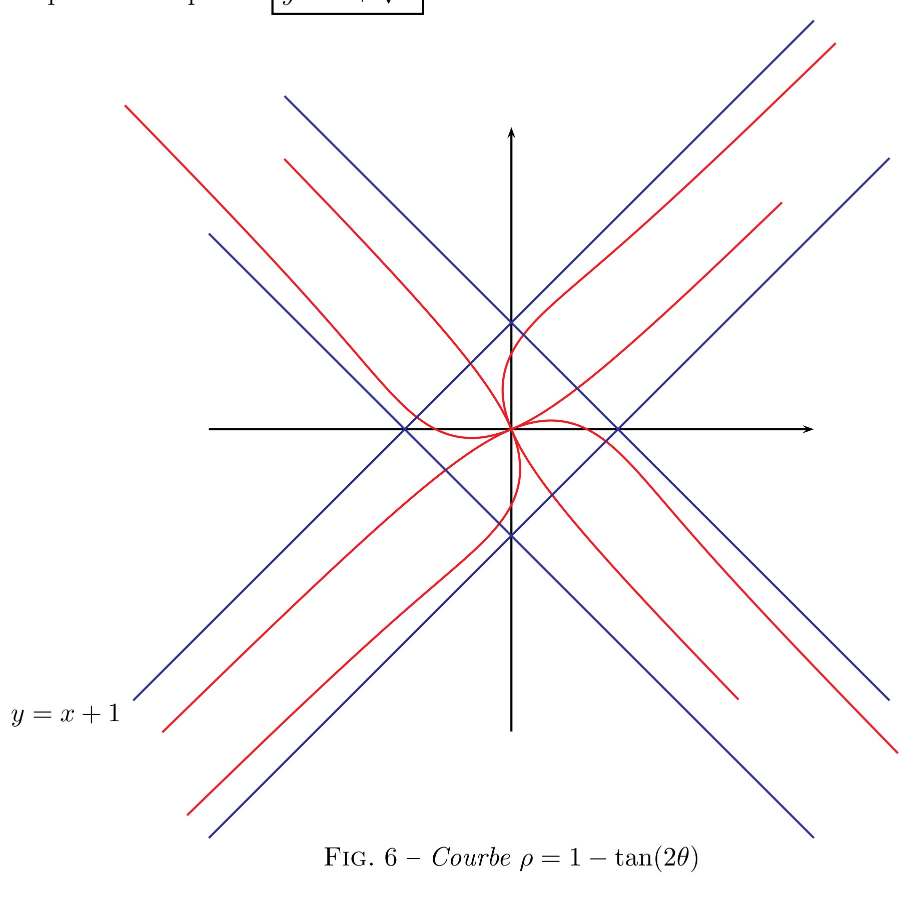

FIG. 6 – *Courbe* $\rho = 1 - \tan(2\theta)$

$\boxed{Q\ 7}$ Le vecteur $\overrightarrow{F'}(t)\left|\begin{matrix}-3a\cos^2 t\sin t\\ 3a\sin^2 t\cos t\end{matrix}\right.$ dirige la tangente en $M(t)$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{t}\left|\begin{matrix}-\cos t\\ \sin t\end{matrix}\right.$ et $\overrightarrow{n}\left|\begin{matrix}\sin t\\ \cos t\end{matrix}\right.$ dirigent respectivement la tangente et la normale en $M(t)$. L'équation cartésienne de la normale s'écrit alors

$$-\cos t x + \sin t y = a(\cos^4 t - \sin^4 t) = a\cos(2t)$$

Le point H est de la forme $H = O + \lambda\overrightarrow{n}$ et puisqu'il se trouve sur la normale, on trouve que $\lambda = -a\cos 2t$ d'où les coordonnées de H : $\boxed{H\left|\begin{matrix}a\cos(2t)\cos t\\ a\cos(2t)\sin t\end{matrix}\right.}$. En coordonnées polaires, puisque $y(t)/x(t) = \tan t$, on en déduit que $\theta = t$ d'où l'équation polaire de la courbe décrite par H : $\boxed{\rho = a\cos(2\theta)}$. On trace sans problème cette courbe :

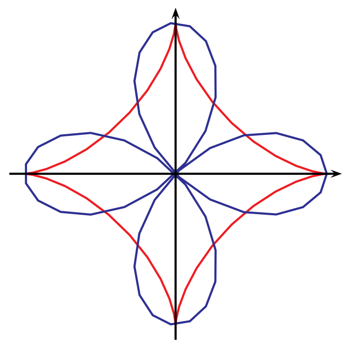

FIG. 7 – *Courbe* $\rho = a\cos(2\theta)$