Ex 1 `Facile`

On considère dans le plan euclidien un triangle isocèle (ABC) avec $AB = AC$. On considère un point D qui varie sur le segment $[AB]$ et un point E sur le segment $[BC]$ tels que $\overline{D'E} = \dfrac{1}{2}\overline{BC}$ où D' est le projeté orthogonal de D sur (BC). Par le point E, on mène la perpendiculaire à la droite (DE). Montrer que cette droite passe par un point fixe I.

Ex 2 `Facile`

On considère le cercle d'équation
$$\mathcal{C} \ : x^2 + y^2 + x - 3y - 3 = 0$$
et le point $A\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right.$. Une droite passant par A est tangente au cercle $\mathcal{C}$ au point M. Calculer la longueur AM.

Ex 3 `Facile`

On considère le cercle d'équation
$$\mathcal{C} :\ x^2 + y^2 + 10x - 2y + 6 = 0$$
et la droite d'éqation
$$\mathcal{D} :\ 2x + y - 7 = 0$$
Écrire les équations cartésiennes des tangentes au cercle $\mathcal{C}$ et parallèles à la droite $\mathcal{D}$.

Ex 4 `Facile`

On considère le cercle d'équation
$$\mathcal{C} :\ x^2 + y^2 + 4x - 6y - 17 = 0$$
et la droite d'équation
$$\mathcal{D} :\ 5x + 2y - 13 = 0$$
Trouver l'équation cartésienne du diamètre de $\mathcal{C}$ perpendiculaire à la droite $\mathcal{D}$.

Ex 5 `Facile`

Tracer la courbe d'équation $y = -3 + \sqrt{21 - 4x - x^2}$

Ex 6 `Facile`

Déterminer les cercles de centre $\Omega\left|\begin{matrix}3\\-1\end{matrix}\right.$ qui coupent la droite d'équation
$$\mathcal{D} :\ 2x - 5y + 18 = 0$$
en deux points A, B avec $AB = 6$.

Ex 7 `Facile`

Déterminer les équations de cercles tangents aux deux droites d'équation $4x - 3y + 10 = 0$, $4x - 3y - 30 = 0$ et dont le centre se trouve sur la droite d'équation $2x + y = 0$.

Ex 8 `Facile, cours`

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, déterminer les droites passant par l'origine, orthogonales et tangentes à un cercle de centre $\Omega\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right.$.

Ex 9 `Facile`

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère deux points $A\left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right.$ et $B\left|\begin{matrix}3\\-1\end{matrix}\right.$.

1. Écrire l'équation cartésienne de la droite (AB).
2. On considère le cercle d'équation :
$$x^2 + y^2 - 8x - 10y + 37 = 0$$
Déterminer la distance entre la droite (AB) et ce cercle.

Ex 10 `Facile, cours`

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, pour $\lambda > 0$, on note $\mathcal{C}_\lambda$ le cercle de centre $\begin{vmatrix}\lambda\\0\end{vmatrix}$ tangent à l'axe (Oy) et Γ_λ le cercle de centre $\begin{vmatrix}\lambda\\\lambda\end{vmatrix}$ tangent à l'axe (Ox). Déterminer les coordonnées des deux points d'intersection de ces cercles, puis le lieu de ces points lorsque λ varie.

Ex 11 `Moyen, Bien`

On considère dans le plan euclidien un cercle de centre Ω et de rayon R. Soit M un point du plan. On appelle *puissance* de M par rapport au cercle C, le réel

$$\pi_C(M) = \|\overrightarrow{\Omega M}\|^2 - R^2$$

a. On considère une droite passant par M et qui coupe le cercle C en deux points A et B. Montrer que

$$\pi_C(M) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$$

b. On considère deux cercles non-concentriques C et C' et l'on appelle *axe radical* l'ensemble des points M du plan vérifiant $\pi_C(M) = \pi_C(M')$. Montrer que cet ensemble est une droite orthogonale à la droite joignant les centres des cercles.

c. Comment construire à la règle et au compas l'axe radical de deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$?

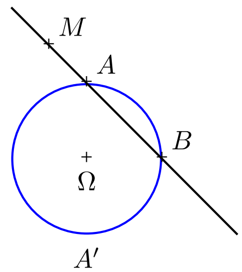


FIG. 1 – *Exercice*

Ex 12 `Moyen, calculs`

Par le sommet A d'un carré $ABCD$, on mène une droite qui rencontre la droite (BC) en E et la droite CD en F. Démontrer que la droite qui joint le point F au milieu I du segment $[BE]$ est tangente au cercle inscrit au carré et rencontre la droite (DE) en un point M situé sur le cercle circonscrit au carré.

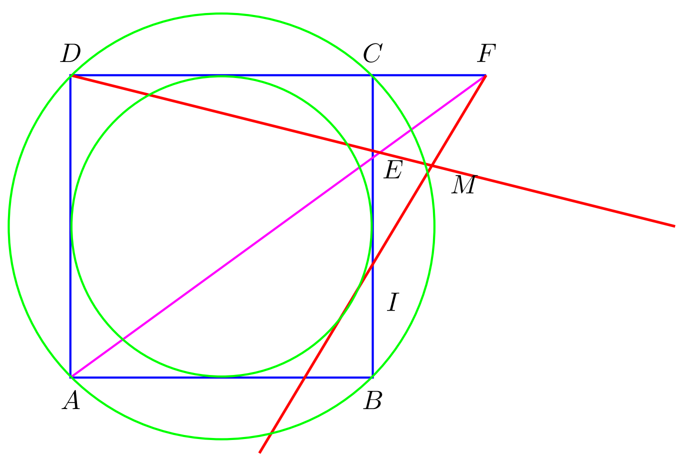
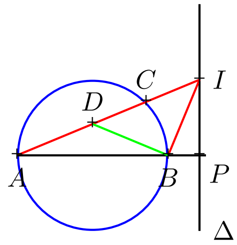


FIG. 2 – *Exercice*

Ex 13 `Bien, trigo`

On considère un cercle de centre 0 et de rayon 1. On considère un diamètre $[AB]$ de ce cercle et un point C sur le cercle différent de A et de B. On appelle D le point de la droite (AC) qui se projette orthogonalement sur (AB) en 0. La tangente au cercle au point C coupe la droite (AB) en un point P. Montrer que les droites (AC), la perpendiculaire à $[AB]$ issue de P et la perpendiculaire à (BD) issue de B sont concourantes.



Ex 14 `Moyen, Trigo`

Soient $[AB]$ et $[PQ]$ deux diamètres d'un cercle $\mathcal{C}$. Par le point A on mène la parallèle à (PQ) qui rencontre au point C le cerlce et en I la droite joignant le point Q au symétrique P' de P par rapport à AB. Soit H le point de rencontre de la droite (AQ) et de la perpendiculaire à (AB) menée par le point I. Montrer que les points P, C et H sont alignés.

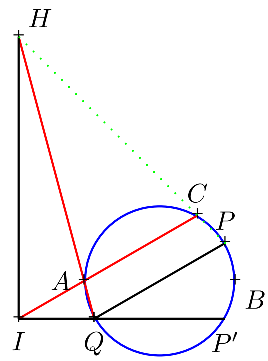


Fig. 3 – *Exercice*

Ex 15 `Facile, cours`

On considère dans l'espace les deux droites affines d'équation cartésienne :

$$\mathcal{D}_1 \ : \begin{cases} x - y + 1 &= 0 \\ x + z - 1 &= 0 \end{cases} \quad \mathcal{D}_2 : \ \begin{cases} x + y - 2 &= 0 \\ x + 1 &= 0 \end{cases}$$

a. Trouver une équation cartésienne de la perpendiculaire commune Δ aux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

b. Calculer la distance de l'origine à la droite Δ.

Corrigé des exercices

$\boxed{Q\ 1}$ On choisit le repère orthonormé tel que $A\begin{vmatrix}0\\a\end{vmatrix}$, $B\begin{vmatrix}-b\\0\end{vmatrix}$ et $C\begin{vmatrix}b\\0\end{vmatrix}$. Notons $D'\begin{vmatrix}\lambda\\0\end{vmatrix}$, on a alors $E\begin{vmatrix}\lambda+b\\0\end{vmatrix}$. On détermine l'équation cartésienne de la droite (AB): $\boxed{ax-by+ab=0}$, les coordonnées du point D: $\boxed{D\begin{vmatrix}\lambda\\ \dfrac{a\lambda+ab}{2}\end{vmatrix}}$ puis l'équation cartésienne de la perpendiculaire en E: $\boxed{-bx+\dfrac{a\lambda+ab}{b}y+b(\lambda+b)=0}$. On peut voir cette équation comme un polynôme en λ :

$$\boxed{\lambda\left[b+\frac{ay}{b}\right]+\left[b(b-x)+ay\right]=0}$$

Il suffit d'annuler le coefficient de λ et le coefficient constant pour voir que cette droite passe toujours par le point $\boxed{I\begin{vmatrix}0\\-b^2/a\end{vmatrix}}$.

$\boxed{Q\ 2}$ Le cercle est de centre $\Omega\begin{vmatrix}-1/2\\3/2\end{vmatrix}$ et de rayon R où $R^2=11/2$. Puisque $\overrightarrow{\Omega M}.\overrightarrow{AM}=0$, d'après Pythagore, $A\Omega^2=AM^2+R^2$. On en tire $AM=3$.

$\boxed{Q\ 3}$ Le cercle est de centre $\Omega\begin{vmatrix}-5\\1\end{vmatrix}$ et de rayon $R=2\sqrt{5}$. Une droite parallèle à $\mathcal{D}$ a pour équation cartésienne

$$\mathcal{D}_t\ :2x+y+t=0$$

Cette droite est tangente au cercle $\mathcal{C}$ si et seulement si $d(\Omega,\mathcal{D}_t)=R$, c'est à dire si et seulement si $|t-9|=10$. On trouve deux valeurs de t, $t_1=19$ et $t_2=-1$, d'où les deux droites:

$$2x+y+19=0 \text{ et } 2x+y-1=0$$

$\boxed{Q\ 4}$ Le cercle $\mathcal{C}$ a pour centre $\Omega\begin{vmatrix}-2\\3\end{vmatrix}$ et pour rayon $R=\sqrt{30}$. Un diamètre passe par Ω et a donc pour équation cartésienne $y-3=m(x+2)$, c'est à dire

$$\mathcal{D}_m\ :mx-y+(3+2m)=0$$

Un vecteur normal à $\mathcal{D}_m$ est $\overrightarrow{n_m}\begin{vmatrix}m\\-1\end{vmatrix}$ et un vecteur normal à $\mathcal{D}$ est $\overrightarrow{n}\begin{vmatrix}5\\2\end{vmatrix}$. Pour que les deux droites soient perpendiculaires, il faut et il suffit que $\overrightarrow{n_m}.\overrightarrow{n}=0$, c'est à dire $m=2/5$. On trouve donc l'équation du diamètre:

$$\boxed{2x-5y+19=0}$$

$\boxed{Q\ 5}$ On doit avoir $(y+3)^2=21-4x-x^2$, c'est à dire

$$(x+2)^2+(y+3)^2=25$$

On reconnaît un demi-cercle de centre $\Omega\begin{vmatrix}-2\\-3\end{vmatrix}$ de rayon $R=5$ situé au dessus de la droite d'équation $y=-3$.

$\boxed{Q\ 6}$ Il suffit de déterminer le rayon du cercle. En appelant H le projeté orthogonal de Ω sur $\mathcal{D}$ et en utilisant Pythagore,

$$R^2=\Omega H^2+(AB/2)^2$$

On calcule $\Omega H^2=29$, puis $R^2=38$. L'équation du cercle est donc

$$\boxed{(x-3)^2+(y+1)^2=38}$$

$\boxed{Q\ 7}$ Si l'on note $\Omega\left|\begin{array}{l}a\\-2a\end{array}\right.$ le centre du cercle, il faut que $d(\Omega,\mathcal{D}_1) = d(\Omega,\mathcal{D}_\in)$, ce qui donne $10a+10 = -10a+30$ et l'on tire $a = 1$. On trouve $\Omega\left|\begin{array}{l}1\\-2\end{array}\right.$ et le rayon du cercle vaut 4.

$\boxed{Q\ 8}$ Les équations de deux droites passant par l'origine sont de la forme $y = mx$ et $y = m'x$. Pour que ces deux droites soient orthogonales, il faut que $1+mm' = 0$ (condition du cours), c'est à dire $m' = -1/m$ ($m = 0$ correspondrait aux deux axes qui ne sont pas solution du problème). Un cercle de centre Ω est tangent à ces deux droites si et seulement si $d^2(\Omega,\mathcal{D}_m) = d^2(\Omega,\mathcal{D}_{-1/m})$ ce qu'on traduit par $\dfrac{(2m-1)^2}{m^2+1} = \dfrac{(2+m)^2}{m^2+1}$, c'est à dire $3m^2-8m-3 = 0$, trinôme qui possède les deux racines $m_1 = 3$ et $m_2 = -1/3$. Les deux droites solutions sont de pente 3 et $-1/3$.

$\boxed{Q\ 9}$

1. On trouve $\boxed{\mathcal{D} :\ x+y-2 = 0}$.
2. L'équation cartésienne réduite du cercle est

$$(x-4)^2+(y-5)^2 = 4$$

C'est donc le cercle de centre $\Omega\left|\begin{array}{l}4\\5\end{array}\right.$ et de rayon 2. La distance du centre Ω à la droite (AB) est donnée par :

$$d(\Omega,\mathcal{D}) = \frac{|4+5-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{7}{\sqrt{2}}$$

. La distance du cercle à la droite est donc

$$\boxed{d(\mathcal{D},\mathcal{D}) = d(\Omega,\mathcal{D}) - R = \frac{7-2\sqrt{2}}{2} > 0}$$

$\boxed{Q\ 10}$

$$\mathcal{C}_\lambda\ : (x-\lambda)^2+y^2 = \lambda^2$$
$$\Gamma_\lambda\ : (x-\lambda)^2+(y-\lambda)^2 = \lambda^2$$

Un point $P\left|\begin{array}{l}x\\y\end{array}\right.$ appartient à ces deux cercles si ses coordonnées vérifient les deux équations. En faisant la différence, on tire $y = \lambda/2$. En reportant dans la première équation, on tire

$$4x^2-8\lambda x+\lambda^2 = 0$$

d'où $x_1 = \dfrac{(2+\sqrt{3})\lambda}{2}$ et $x_2 = \dfrac{2-\sqrt{3}\lambda}{2}$. d'où $P_\lambda\dfrac{\lambda}{2}\left|\begin{array}{l}2+\sqrt{3}\\1\end{array}\right.$ et $Q_\lambda\dfrac{\lambda}{2}\left|\begin{array}{l}2-\sqrt{3}\\1\end{array}\right.$. Les points décrivent les droites d'équations $y = (2+\sqrt{3})x$ et $y = (2-\sqrt{3})x$.

$\boxed{Q\ 11}$

a. Introduisons le point A' symétrique de A par rapport à Ω. En utilisant que $[AA']$ est un diamètre, donc que $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BA'} = 0$, calculons

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{A'B})\\
&= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA'}\\
&= (\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega A}).(\overrightarrow{M\Omega}+\overrightarrow{\Omega A'})\\
&= \|M\Omega\|^2+\overrightarrow{M\Omega}.(\overrightarrow{\Omega A}+\overrightarrow{\Omega A'})+\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega A'}\\
&= \|M\Omega\|^2-R^2\\
&= \pi_C(M)
\end{aligned}$$

b. On se place dans un repère orthonormé dans lequel :

$$(C): \ x^2+y^2=R^2 \quad (C') \ : (x-d)^2+y^2=r^2$$

où $\Omega\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix}$ et $\Omega'\begin{vmatrix}d\\0\end{vmatrix}$ sont les centres des cercles de rayon R et r. On calcule

$$\begin{aligned}\pi_C(M)=\pi_C(M') &\Longleftrightarrow x^2+y^2-R^2=(x-d)^2+y^2-r^2\\ &\Longleftrightarrow 2dx=R^2+d^2-r^2\end{aligned}$$

On trouve l'équation d'une droite orthogonale à $(\Omega\Omega')$.

c. Si l'on considère un cercle $\mathcal{C}_3$ qui coupe les deux cercles en A,B,C,D, l'intersection M des droites (AB) et (CD) vérifie $\pi_3(M)=\pi_1(M)=\pi_2(M)$ et ce point est donc sur l'axe radical. Il suffit de recommencer cette construction avec un autre cercle $\mathcal{C}_4$ pour obtenir un deuxième point M' de l'axe radical et tracer à la règle la droite (MM'). On remarque que si les deux cercles se coupent en P et Q, l'axe radical est la droite (PQ).

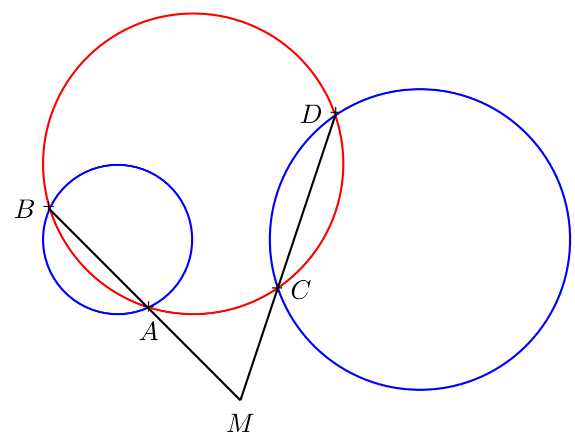


FIG. 4 – *Construction de l'axe radical à la règle et au compas*

$\boxed{Q\ 12}$ On considère le repère orthonormé d'origine le centre du carré et d'axes parallèles aux axes du carré. Alors $A\begin{vmatrix}-a\\-a\end{vmatrix}$, $B\begin{vmatrix}a\\-a\end{vmatrix}$, $C\begin{vmatrix}a\\a\end{vmatrix}$, $D\begin{vmatrix}-a\\a\end{vmatrix}$. On considère la droite qui passe par A,E,F. En notant m sa pente, son équation cartésienne est $y+a=m(x+a)$. On en déduit les coordonnées de $\boxed{E\begin{vmatrix}a\\(2m-1)a\end{vmatrix}}$ et $\boxed{F\begin{vmatrix}\dfrac{a(2-m)}{m}\\a\end{vmatrix}}$. Puis les coordonnées de $\boxed{I\begin{vmatrix}a\\(m-1)a\end{vmatrix}}$. Ensuite l'équation cartésienne de la droite (FI) :

$$\boxed{(FI) \ : m(m-2)x+2(1-m)y+a(m^2-2m+2)=0}$$

On calcule la distance de l'origine à cette droite :

$$d(O,(FI))=\frac{a|m^2-2m+2|}{\sqrt{m^2(m-2)^2+4(m-1)^2}}$$

mais comme $(m^2-2m+2)^2=m^2(m-2)^2+4(1-m)^2=m^4-4m^3+8m^2-8m+4$, on trouve que cette distance vaut a et par conséquent, la droite (FI) est bien tangente au cercle inscrit dans le carré. Cherchons ensuite les coordonnées du point M. $\boxed{\overrightarrow{DE}\left|\begin{matrix}2a\\2(m-1)a\end{matrix}\right.}$, $M = D + \lambda\overrightarrow{DE}$ d'où si $M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$,

$$\begin{cases} x & = (2\lambda - 1)a \\ y & = [1 + 2(m-1)\lambda] \end{cases}$$

Comme $M \in (FI)$, on tire $\lambda = -\dfrac{m^2-2}{m^2-2m+2}$ et ensuite

$$\boxed{M\left|\begin{matrix}-\dfrac{a(m^2-2)}{m^2-2m+2}\\-\dfrac{a(m^2-4m+2)}{m^2-2m+2}\end{matrix}\right.}$$

On vérifie ensuite que $d(O,M)^2 = 2a^2$.

$\boxed{Q\ 13}$ Dans le repère orthonormé centré en O, d'axe (Ox) parallèle à $[AB]$, $A\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.$, $B\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$, $C\left|\begin{matrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{matrix}\right.$, on calcule l'équation cartésienne de la droite (AC) :

$$\boxed{(AC)\ : \sin\theta x - (\cos\theta + 1)y + \sin\theta = 0}$$

Puis on trouve les coordonnées de $\boxed{D\left|\begin{matrix}0\\\tan\theta/2\end{matrix}\right.}$. La tangente en C a pour équation cartésienne

$$\boxed{T_\theta :\ \cos\theta x + \sin\theta y = 1}$$

et on trouve le point $\boxed{P\left|\begin{matrix}1/\cos\theta\\0\end{matrix}\right.}$. On note I l'intersection de la perpendiculaire à (BD) passant par B et de la perpendiculaire à (AB) passant par P : $I = B + \lambda\vec{n}$ où $\vec{n}\left|\begin{matrix}\tan\theta/2\\1\end{matrix}\right.$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{BD}$. En utilisant que $x_I = 1/\cos\theta$, on trouve que

$$\boxed{I\left|\begin{matrix}1/\cos\theta\\\tan\theta\end{matrix}\right.}$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que ce point appartient à la droite (AC) :

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - (\cos\theta + 1)\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \sin\theta = 0$$

$\boxed{Q\ 14}$ On se place dans le repère orthonormé avec $A\left|\begin{matrix}-1\\0\end{matrix}\right.$, $B\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$, $P\left|\begin{matrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{matrix}\right.$, $Q\left|\begin{matrix}-\cos\theta\\-\sin\theta\end{matrix}\right.$, $P'\left|\begin{matrix}\cos\theta\\-\sin\theta\end{matrix}\right.$. On cherche $C = A + \lambda\overrightarrow{OP}\left|\begin{matrix}-1+\lambda\cos\theta\\\lambda\sin\theta\end{matrix}\right.$ avec $x_C^2 + y_C^2 = 1$ et l'on trouve $\lambda = 2\cos\theta$ et finalement

$$\boxed{C\left|\begin{matrix}\cos(2\theta)\\\sin(2\theta)\end{matrix}\right.}$$

On cherche ensuite les coordonnées de $I = A + \lambda\overrightarrow{OP}$ avec $y_I = -\sin\theta$ ce qui donne $\lambda = -1$ et

$$\boxed{I\left|\begin{matrix}-(1+\cos\theta)\\-\sin\theta\end{matrix}\right.}$$

Cherchons ensuite les coordonnées de $H = A + \lambda\overrightarrow{QA}$. Puisque $x_H = x_I$, on trouve que $\lambda = \dfrac{\cos\theta}{1-\cos\theta}$ et ensuite

$$\boxed{H\left|\begin{array}{c}-(1+\cos\theta)\\ \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{1-\cos\theta}\end{array}\right.}$$

Puisque

$$\overrightarrow{HQ}\left|\begin{array}{c}\cos\theta(2\cos\theta+1)\\ \sin\theta\cos\theta\dfrac{1-2\cos\theta}{1-\cos\theta}\end{array}\right. \qquad \overrightarrow{HP}\left|\begin{array}{c}2\cos\theta+1\\ \sin\theta\dfrac{1-2\cos\theta}{1-\cos\theta}\end{array}\right.$$

on voit que ces deux vecteurs sont colinéaires et donc les trois points P, Q, H sont alignés.

$\boxed{Q\ 15}$

a. Un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ est $\overrightarrow{d_1}\left|\begin{array}{c}1\\1\\-1\end{array}\right.$ et un vecteur directeur de $\mathcal{D}_2$ est $\overrightarrow{d_2}\left|\begin{array}{c}0\\0\\1\end{array}\right.$. Par conséquent, un vecteur directeur de la perpendiculaire commune est $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{d_1}\wedge\overrightarrow{d_2}\left|\begin{array}{c}1\\-1\\0\end{array}\right.$. Le faisceau de plans issu de $\mathcal{D}_1$ s'écrit :

$$\mathcal{P}_\lambda :\ (\lambda+1)x - \lambda y + z + (\lambda-1) = 0$$

et le plan vectoriel associé a pour équation

$$P_\lambda :\ (\lambda+1)x - \lambda y + z = 0$$

On veut que $\overrightarrow{n}\in P_\lambda$ d'où $\lambda = -1/2$. Le faisceau issu de $\mathcal{D}_2$ est :

$$\mathcal{Q}_\mu :\ (\mu+1)x + y + (\mu-2) = 0$$

et comme on veut que $\overrightarrow{n}\in Q_\mu$, on trouve que $\mu = 0$. Par conséquent, une équation cartésienne de Δ est

$$\boxed{(\Delta) :\ \begin{cases} x+y-2z-3 &= 0\\ x+y-2 &= 0\end{cases}}$$

b. On dispose déjà d'un vecteur $\overrightarrow{n}$ directeur de Δ. On cherche un point particulier de Δ, par exemple le point $A\left|\begin{array}{c}2\\0\\-1/2\end{array}\right.$ et il suffit d'appliquer la formule du cours :

$$d(O,\Delta) = \frac{\|\overrightarrow{OA}\wedge\overrightarrow{n}\|}{\|\overrightarrow{n}\|} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}}$$