Ex 1 `Calcul, cours`

Dans l'espace, on considère un vecteur $\overrightarrow{u}$ unitaire et une base orthonormale directe $(\overrightarrow{i},\overrightarrow{j},\overrightarrow{k})$.

a. Calculer $\alpha = \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{i}\|^2 + \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{j}\|^2 + \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{k}\|^2$.

b. En déduire que l'une de ces trois normes est $\geq \sqrt{2/3}$.

Ex 2 `Calcul, cours`

Soient trois vecteurs $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ de l'espace.

a. Montrer l'identité de Jacobi :

$$\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) + \overrightarrow{b} \wedge (\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{a}) + \overrightarrow{c} \wedge (\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{0}$$

b. Montrer que

$$(\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}).(\overrightarrow{c} \wedge \overrightarrow{d}) = \begin{vmatrix} \overrightarrow{a}.\overrightarrow{c} & \overrightarrow{a}.\overrightarrow{d} \\ \overrightarrow{b}.\overrightarrow{c} & \overrightarrow{b}.\overrightarrow{d} \end{vmatrix}$$

Ex 3 `Moyen`

On considère deux vecteurs $(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b})$ de l'espace. Résoudre l'équation vectorielle

$$\overrightarrow{x} + \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{x} = \overrightarrow{b}$$

Ex 4 `Moyen`

On considère deux vecteurs $\overrightarrow{a}$ et $\overrightarrow{b}$ non-nuls et orthogonaux. Résoudre l'équation vectorielle :

$$\begin{cases} \overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{a} &= \overrightarrow{b} \\ \overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{x} &= \overrightarrow{a} \end{cases}$$

Ex 5 `Facile, cours`

On considère le plan $\mathcal{P}$ représenté paramétriquement par :

$$\begin{cases} x &= 2 + \lambda - \mu \\ y &= 3 - \lambda + 2\mu \qquad (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2 \\ z &= 1 + 2\lambda + \mu \end{cases}$$

a. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

b. Déterminer la distance du point $A\left|\begin{matrix}1\\1\\1\end{matrix}\right.$ au plan $\mathcal{P}$.

c. Donner une équation cartésienne de la droite passant par le point A et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

Ex 6 `Facile, cours`

On considère la droite d'équation :

$$\begin{cases} x + y - z + 1 &= 0 \\ 2x - y + z - 2 &= 0 \end{cases}$$

Déterminer la distance du point $\Omega\left|\begin{matrix}1\\2\\1\end{matrix}\right.$ à cette droite.

Ex 7 `À faire, calculs`

Soit $a \in \mathbb{R}$ et le point $A\left|\begin{matrix}1\\1\\a\end{matrix}\right.$. On considère les quatre plans d'équations :

$$(P_1)\ : x + y - 1 = 0,\ (P_2) :\ y + z - 1 = 0,\ (P_3) :\ x + z - 1 = 0,\ (P_4) :\ x - y + z = 0$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur a pour que les projections orthogonales de A sur les quatre plans soient 4 points coplanaires.

Corrigé des exercices

$\boxed{Q\ 1}$

a. Notons $\overrightarrow{u}\begin{vmatrix}x\\y\\z\end{vmatrix}$. Alors $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{i}\begin{vmatrix}0\\z\\-y\end{vmatrix}$, $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{j}\begin{vmatrix}-z\\0\\x\end{vmatrix}$, $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{k}\begin{vmatrix}y\\-x\\0\end{vmatrix}$. Par conséquent, $\alpha = 2(x^2+y^2+z^2) = 2$ puisque $\|u\|^2 = 1$.

b. Par l'absurde, si les trois normes étaient toutes $< \sqrt{2/3}$, on aurait $2 = \alpha < 2/3 + 2/3 + 2/3 = 2$, ce qui est absurde.

$\boxed{Q\ 2}$

a. Utilisons la formule du double produit vectoriel :

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{a}\wedge(\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{c})+\overrightarrow{b}\wedge(\overrightarrow{c}\wedge\overrightarrow{a})+\overrightarrow{c}\wedge(\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b})\\
&=(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{c})\overrightarrow{b}-(\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b})\overrightarrow{c}+(\overrightarrow{b}.\overrightarrow{a})\overrightarrow{c}-(\overrightarrow{b}.\overrightarrow{c})\overrightarrow{a}+(\overrightarrow{c}.\overrightarrow{b})\overrightarrow{a}-(\overrightarrow{c}.\overrightarrow{a})\overrightarrow{b}\\
&=\overrightarrow{0}\end{aligned}$$

b. Par le calcul dans une base orthonormée, $\overrightarrow{a}\begin{vmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{vmatrix}$, $\overrightarrow{b}\begin{vmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{vmatrix}$, $\overrightarrow{c}\begin{vmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{vmatrix}$, on trouve que

$$(\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}).(\overrightarrow{c}\wedge\overrightarrow{d}) = (a_2b_3-a_3b_2)(c_2d_3-c_3d_2)+(a_3b_1-a_1b_3)(c_3d_1-c_1d_3)+(a_1b_2-a_2b_1)(c_1d_2-c_2d_1)$$

$$\begin{aligned}&\begin{vmatrix}\overrightarrow{a}.\overrightarrow{c} & \overrightarrow{a}.\overrightarrow{d}\\ \overrightarrow{b}.\overrightarrow{c} & \overrightarrow{b}.\overrightarrow{d}\end{vmatrix}\\
&= a_1c_1b_1d_1 + a_1b_2c_1d_2 + a_1b_3c_1d_3\\
&\quad + a_2b_1c_2d_1 + a_2b_2c_2d_2 + a_2b_3c_2d_3\\
&\quad + a_3b_3c_3d_3 + a_3b_1c_3d_1 + a_3b_2c_3d_2\\
&\quad - a_1b_1c_1d_1 - a_2b_1c_1d_2 - a_3b_1c_1d_3\\
&\quad - a_1b_2c_2d_1 - a_2b_2c_2d_2 - a_3b_2c_2d_3\\
&\quad - a_1b_3c_3d_1 - a_2b_3c_3d_2 - a_3b_3c_3d_2\end{aligned}$$

Et on vérifie que ces deux expressions sont identiques.

$\boxed{Q\ 3}$ Soit $\overrightarrow{x}$ une solution. En prenant le produit scalaire avec $\overrightarrow{a}$, on trouve que

$$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}$$

En prenant le produit vectoriel avec $\overrightarrow{a}$, et en utilisant la formule du double produit vectoriel, on obtient

$$\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{x} + (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{x})\overrightarrow{a} - \|\overrightarrow{a}\|^2\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}$$

d'où l'on tire (remplacer $\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{x}$ par $\overrightarrow{b}-\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{x}$ par $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}$) que :

$$\boxed{\overrightarrow{x} = \frac{1}{1+\|\overrightarrow{a}\|^2}\left[\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b} + (\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b})\overrightarrow{a}\right]}$$

On vérifie réciproquement en utilisant la formule du double produit vectoriel que ce vecteur est solution.

$\boxed{Q\ 4}$ Soit $\overrightarrow{x}$ un vecteur solution. On calcule $\overrightarrow{b}\wedge(\overrightarrow{x}\wedge\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{b} = \overrightarrow{0}$ d'où en utilisant la formule du double produit vectoriel, $(\overrightarrow{b}.\overrightarrow{a})\overrightarrow{x} - (\overrightarrow{b}.\overrightarrow{x})\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$. Mais puisque $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = 0$ et que $\overrightarrow{a}\neq\overrightarrow{0}$, on en tire que $\boxed{\overrightarrow{b}.\overrightarrow{x} = 0}$. De la même façon, en calculant $\overrightarrow{a}\wedge(\overrightarrow{b}\wedge\overrightarrow{x})$, on trouve que $\boxed{\overrightarrow{a}.\overrightarrow{x} = 0}$. Puisque le vecteur $\overrightarrow{x}$ est orthogonal à $\overrightarrow{a}$ et à $\overrightarrow{b}$, il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{x} = \lambda\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b}$. Alors en calculant

$$\lambda(\overrightarrow{a}\wedge\overrightarrow{b})\wedge\overrightarrow{a} = \lambda\|\overrightarrow{a}\|^2\overrightarrow{b}$$

on doit avoir $\lambda = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{a}\|^2}$. De même, en calculant

$$\overrightarrow{b} \wedge (\lambda \overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}) = \lambda \|b\|^2 \overrightarrow{a}$$

on doit avoir $\lambda = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{b}\|^2}$. Par conséquent,

- Si $\|a\| \neq \|b\|$, $\mathcal{S} = \emptyset$.
- Si $\|a\| = \|b\|$, $\mathcal{S} = \left\{ \dfrac{\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{a}\|^2} \right\}$.

$\boxed{Q\ 5}$

a. Le plan passe par le point $\Omega \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{vmatrix}$ et est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u} \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{vmatrix}$, $\overrightarrow{v} \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$. Le vecteur $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \begin{vmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \end{vmatrix}$ est normal au plan. L'équation cartésienne est donc de la forme $-5x - 3y + z + c = 0$. Puisque $\Omega \in \mathcal{P}$, on trouve que $c = 18$, et donc

$$\boxed{\mathcal{P} : \quad -5x - 3y + z + 18 = 0}$$

b. Utilisons la formule du cours :

$$d(A,\mathcal{P}) = \frac{|-5 - 3 + 1 + 18|}{\sqrt{5^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{11}{\sqrt{35}}$$

c. La droite est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{n}$ d'où une équation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= 1 - 5\lambda \\ y &= 1 - 3\lambda \\ z &= 1 + \lambda \end{cases}$$

En éliminant le paramètre, on obtient une équation cartésienne :

$$\begin{cases} -3x + 5z - 6 &= 0 \\ y + 3z - 4 &= 0 \end{cases}$$

$\boxed{Q\ 6}$ Le vecteur $\overrightarrow{u} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{vmatrix}$ est normal au plan $\mathcal{P}_1$, le vecteur $\overrightarrow{v} \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix}$ est normal au plan $\mathcal{P}_2$. Puisque $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$, le vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} \begin{vmatrix} 0 \\ -3 \\ -3 \end{vmatrix}$ dirige la droite $\mathcal{D}$. On peut également prendre comme vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{n} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ qui lui est proportionnel. Cherchons un point A de la droite $\mathcal{D}$. En choisissant $z = 0$, on trouve par exemple $A \begin{vmatrix} 1/3 \\ -4/3 \\ 0 \end{vmatrix}$. En utilisant la formule du cours,

$$d(\Omega,\mathcal{D}) = \frac{\|\overrightarrow{A\Omega} \wedge \overrightarrow{n}\|}{\|\overrightarrow{n}\|} = \frac{\sqrt{19}}{\sqrt{3}\sqrt{2}}$$

$\boxed{Q\ 7}$ Un vecteur normal au plan (P_1) est $\overrightarrow{n_1} \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$. En notant $A_1 \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix}$ le projeté orthogonal de A sur le plan P_1, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A_1 = A + \lambda \overrightarrow{n}$:

$$\begin{cases} x &= 1 + \lambda \\ y &= 1 + \lambda \\ z &= a \end{cases}$$

Comme $A_1 \in P_1$, on a $(1+\lambda)+(1+\lambda)-1=0$ d'où l'on tire $\lambda=-1/2$ et $A_1 \left| \begin{array}{l} 1/2 \\ 1/2 \\ a \end{array} \right.$. Par la même méthode, on trouve

$A_2 \left| \begin{array}{c} 1 \\ 1-a/2 \\ a/2 \end{array} \right.$, $A_3 \left| \begin{array}{c} 1-a/2 \\ 1 \\ a/2 \end{array} \right.$ et $A_4 \left| \begin{array}{c} 1-a/3 \\ 1+a/3 \\ 2a/3 \end{array} \right.$. Les quatre points sont coplanaires si et seulement si $\mathrm{Det}(\overrightarrow{A_1A_2},\overrightarrow{A_1A_3},\overrightarrow{A_1A_4}) = 0$, ou encore (pour simplifier les calculs), $\mathrm{Det}(2\overrightarrow{A_1A_2},2\overrightarrow{A_1A_3},6\overrightarrow{A_1A_4}) = 0$. En développant, on trouve que $2a(a+1)=0$, c'est à dire $\boxed{a=0 \text{ ou } a=-1}$.