Ex 1 Direct, cours

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points $A\left|\begin{matrix}1\\-2\end{matrix}\right.$ et $B\left|\begin{matrix}-2\\3\end{matrix}\right.$.

a. Écrire l'équation cartésienne de la droite (AB).

b. Déterminer la distance du point $C\left|\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\right.$ à la droite (AB) par deux calculs différents.

Ex 2 Direct, cours

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère le point $\Omega\left|\begin{matrix}1\\2\end{matrix}\right.$. Parmi toutes les droites passant par Ω, déterminer celles qui sont à distance 1 du point $A\left|\begin{matrix}-1\\4\end{matrix}\right.$.

Ex 3 Moyen, cours, classique

Dans le plan, on considère trois points A, B et C non-alignés. Une droite $\mathcal{D}$ coupe les droites (BC), (AC) et (AB) en A', B' et C' respectivement. Par A' on mène les parallèles à (AB) et (AC) qui coupent respectivement aux points E et F la parallèle à (BC) menée par A. Montrer que les droites $(B'E)$ et $(C'F)$ sont parallèles.

Ex 4 Facile, cours

On considère un point $A_\lambda\left|\begin{matrix}\lambda\\0\end{matrix}\right.$ de l'axe (Ox) et un point $B_\lambda\left|\begin{matrix}0\\a-\lambda\end{matrix}\right.$ de l'axe (Oy).

a. Écrire l'équation cartésienne de la médiatrice du segment $[A_\lambda B_\lambda]$.

b. Montrer que lorsque λ varie, cette médiatrice passe toujours par un point fixe.

Ex 5 Moyen, cours

On considère dans le plan euclidien un triangle équilatéral (ABC). On choisit un repère orthonormé d'origine le milieu de $[AB]$, avec le vecteur $\overrightarrow{i} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|}$ dans lequel $A\left|\begin{matrix}-a\\0\end{matrix}\right.$ et $B\left|\begin{matrix}a\\0\end{matrix}\right.$ avec $a > 0$.

a. Déterminer les coordonnées du point C.

b. Écrire les équations cartésiennes des droites (AC) et (BC).

c. Montrer que si M est un point intérieur au triangle, la somme des distances de M à chaque côté du triangle est constante.

Ex 6 Facile, cours

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, déterminer les droites passant par l'origine, orthogonales et tangentes à un cercle de centre $\Omega\left|\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\right.$.

Ex 7 Facile

Dans le plan, on considère un parallélogramme $ABCD$. On note E le pied de la perpendiculaire menée de C à (AB). On note F le pied de la perpendiculaire menée de C à (BD). Montrer que $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BF} = \|\overrightarrow{BC}\|^2 + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BE}$.

Ex 8 Facile, cours

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, pour $\lambda > 0$, on note $\mathcal{C}_\lambda$ le cercle de centre $\left|\begin{matrix}\lambda\\0\end{matrix}\right.$ tangent à l'axe (Oy) et Γ_λ le cercle de centre $\left|\begin{matrix}\lambda\\\lambda\end{matrix}\right.$ tangent à l'axe (Ox). Déterminer les coordonnées des deux points d'intersection de ces cercles, puis le lieu de ces points lorsque λ varie.

Corrigé des exercices

$\boxed{Q\ 1}$

a. Soit $M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ un point du plan. Il appartient à la droite (AB) si et seulement si $\text{Det}(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}) = 0$, ce qui donne l'équation cartésienne de la droite (AB) : $\boxed{(AB)\ : 5x + 3y + 1 = 0}$.

b. Avec la formule du cours, $d(C,(AB)) = \dfrac{|5+3+1|}{\sqrt{5^2+3^2}} = \dfrac{9}{\sqrt{34}}$. En utilsant l'autre formule, $d(C,(AB)) = \dfrac{|\text{Det}(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$, on retrouve le même résultat.

$\boxed{Q\ 2}$ On peut décrire toutes les droites passant par Ω (sauf la droite verticale) à l'aide d'un seul paramètre, la pente m. L'équation cartésienne d'une telle droite est donc $(y-2) = m(x-1)$, c'est à dire $\boxed{\mathcal{D}_m\ : mx - y + (2-m) = 0}$. La distance du point A à la droite $\mathcal{D}_m$ est alors donnée par la formule du cours :

$$d(A,\mathcal{D}_m) = \frac{|-m-4+2-m|}{\sqrt{m^2+1}} = \frac{2|m+1|}{\sqrt{m^2+1}}$$

Cette distance vaut 1 si et seulement si $4(m+1)^2 = m^2+1$, c'est à dire $3m^2+8m+3=0$, et on trouve les deux pentes solutions, $m_1 = \dfrac{-4+\sqrt{7}}{3}$ et $m_2 = \dfrac{-4-\sqrt{7}}{3}$. On vérifie ensuite que la droite verticale passant par Ω ne convient pas en écrivant son équation cartésienne $x = 1$ et en calculant la distance de A à cette droite qui vaut 2.

$\boxed{Q\ 3}$ Faire un dessin !

- Choix du repère : $\mathcal{R} = (A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$. Dans ce repère, $A\left|\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right.$, $B\left|\begin{matrix}1\\0\end{matrix}\right.$, $C\left|\begin{matrix}0\\1\end{matrix}\right.$. Comme B' est sur la droite (AC), il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $B'\left|\begin{matrix}0\\b\end{matrix}\right.$. De même, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $C'\left|\begin{matrix}c\\0\end{matrix}\right.$.
- Équation cartésienne de la droite $\mathcal{D} = (B'C')$: un point $M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ est sur cette droite si et seulement si $\text{Det}(\overrightarrow{B'M},\overrightarrow{B'C'}) = 0$, c'est à dire $\boxed{(B'C')\ : bx + cy - bc = 0}$.
- On calcule de même l'équation de la droite (BC) et l'on trouve $\boxed{(BC)\ : x + y - 1 = 0}$.
- Coordonnées de $A'\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$. Puisque A' est sur la droite $(B'C')$ et sur (BC), ses coordonnées vérifient le système $\begin{cases}x+y &= 1\\ bx+cy &= bc\end{cases}$. On en tire $\boxed{A'\left|\begin{matrix}\dfrac{c(1-b)}{c-b}\\ \dfrac{b(1-c)}{b-c}\end{matrix}\right.}$. On remarque que le cas où $b = c$ correspond à une droite $\mathcal{D}$ parallèle à (BC) ce qui est exclu par l'énoncé.
- Équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}'$, parallèle à (BC) passant par A : on trouve $\boxed{\mathcal{D}'\ : x + y = 0}$.
- Coordonnées de E : il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $E = A' + \lambda\overrightarrow{AB}$, c'est à dire $\begin{cases}x &= \dfrac{c(1-b)}{c-b} + \lambda\\ y &= \dfrac{b(1-c)}{b-c}\end{cases}$. Puisque $E \in \mathcal{D}'$, $x + y = 0$ et on en tire que $\boxed{E\left|\begin{matrix}\dfrac{b(1-c)}{c-b}\\ \dfrac{b(1-c)}{b-c}\end{matrix}\right.}$.
- Coordonnées de F : de la même façon, en écrivant $F = A' + \lambda\overrightarrow{AC'}$, on trouve que $\boxed{F\left|\begin{matrix}\dfrac{c(1-b)}{c-b}\\ -\dfrac{c(1-b)}{c-b}\end{matrix}\right.}$.

– Pour montrer que $(B'E)$ et $(C'F)$ sont parallèles, calculons $\boxed{\overrightarrow{B'E}\left|\begin{matrix}\dfrac{b(1-c)}{c-b}\\ \dfrac{b(b-1)}{c-b}\end{matrix}\right.}$ et $\boxed{\overrightarrow{C'F}\left|\begin{matrix}\dfrac{c(1-c)}{c-b}\\ -\dfrac{c(1-b)}{c-b}\end{matrix}\right.}$. Ensuite, calculons le produit mixte

$$\mathrm{Det}(\overrightarrow{B'E},\overrightarrow{C'F}) = \frac{1}{(c-b)^2}\big[-bc(1-c)(1-b) - bc(b-1)(1-c)\big] = 0$$

après simplifications. Le résultat est montré.

$\boxed{Q\ 4}$

a. Soit $M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$. On traduit $d(A,M) = d(B,M)$ et on trouve l'équation cartésienne

$$\boxed{\mathcal{D}_\lambda:\ 2\lambda x + 2(\lambda - a)y - 2\lambda a + a^2 = 0}$$

b. On remarque que le point $C\left|\begin{matrix}a/2\\a/2\end{matrix}\right.$ appartient à toutes les droites $\mathcal{D}_\lambda$.

$\boxed{Q\ 5}$

a. Si $C\left|\begin{matrix}0\\c\end{matrix}\right.$, on calcule $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = c^2 + a^2$ qui doit valoir $\|\overrightarrow{AB}\|^2 = 4a^2$ d'où l'on tire $c = \sqrt{3}a$ et donc $C\left|\begin{matrix}0\\\sqrt{3}a\end{matrix}\right.$.

b. Soit $M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ un point de la droite (AC). Il doit vérifier $\mathrm{Det}(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}) = 0$, d'où l'on tire

$$\boxed{(AC)\ :\sqrt{3}ax - ay + \sqrt{3}a^2 = 0}$$

et de même

$$\boxed{(BC)\ :\sqrt{3}ax + ay - \sqrt{3}a^2 = 0}$$

c. Soit un point $M\left|\begin{matrix}x\\y\end{matrix}\right.$ intérieur au triangle. La distance de M à la droite (AB) vaut y ($y \geq 0$). Appliquons la formule du cours pour calculer la distance de M à la droite (AC) :

$$d(M,AC) = \frac{|\sqrt{3}ax - ay + \sqrt{3}a^2|}{\sqrt{3a^2+a^2}} = \frac{\sqrt{3}x - y + \sqrt{3}a}{2}$$

On a utilisé que le point M était à droite de la droite (AC) pour enlever la valeur absolue. De même,

$$d(M,BC) = \frac{|\sqrt{3}ax + ay - \sqrt{3}a^2|}{\sqrt{3a^2+a^2}} = \frac{-\sqrt{3}x - y + \sqrt{3}a}{2}$$

La somme des trois distances est constante et vaut $\sqrt{3}a$.

$\boxed{Q\ 6}$ Les équations de deux droites passant par l'origine sont de la forme $y = mx$ et $y = m'x$. Pour que ces deux droites soient orthogonales, il faut que $1 + mm' = 0$ (condition du cours), c'est à dire $m' = -1/m$ ($m = 0$ correspondrait aux deux axes qui ne sont pas solution du problème). Un cercle de centre Ω est tangent à ces deux droites si et seulement si $d^2(\Omega,\mathcal{D}_m) = d^2(\Omega,\mathcal{D}_{-1/m})$ ce qu'on traduit par $\dfrac{(2m-1)^2}{m^2+1} = \dfrac{(2+m)^2}{m^2+1}$, c'est à dire $3m^2 - 8m - 3 = 0$, trinôme qui possède les deux racines $m_1 = 3$ et $m_2 = -1/3$. Les deux droites solutions sont de pente 3 et $-1/3$.

$\boxed{Q\ 7}$ Faire un dessin ! Calculons

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BF} - \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BE} &= \overrightarrow{BD}.(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CF}) - \overrightarrow{BA}.(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE})\\ &= \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}\\ &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}).\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

$\boxed{Q\ 8}$

$$\mathcal{C}_\lambda \ : (x-\lambda)^2 + y^2 = \lambda^2$$
$$\Gamma_\lambda \ : (x-\lambda)^2 + (y-\lambda)^2 = \lambda^2$$

Un point $P\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix}$ appartient à ces deux cercles si ses coordonnées vérifient les deux équations. En faisant la différence, on tire $y = \lambda/2$. En reportant dans la première équation, on tire

$$4x^2 - 8\lambda x + \lambda^2 = 0$$

d'où $x_1 = \dfrac{(2+\sqrt{3})\lambda}{2}$ et $x_2 = \dfrac{2-\sqrt{3}\lambda}{2}$. d'où $P_\lambda\dfrac{\lambda}{2}\begin{vmatrix} 2+\sqrt{3} \\ 1 \end{vmatrix}$ et $Q_\lambda\dfrac{\lambda}{2}\begin{vmatrix} 2-\sqrt{3} \\ 1 \end{vmatrix}$. Les points décrivent les droites d'équations $y = (2+\sqrt{3})x$ et $y = (2-\sqrt{3})x$.