Ex 1 `Calcul`

Déterminer les racines carrées du complexe $z = 6 + 2i$.

Ex 2 `Calcul`

Résoudre l'équation du second degré :

$$z^2 + (4 + 2i)z + (7 + 4i) = 0$$

Ex 3 `Calcul`

Résoudre $iz^2 + 4z + 8 = 0$.

Ex 4 `Calcul`

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^4 = 4(\overline{z})^2$$

On donnera la forme trigonométrique et algébrique des solutions.

Ex 5 `Calcul`

Étudier la fonction :

$$f : \begin{cases}]-\pi/2, \pi/2[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \arctan\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}} \end{cases}$$

Retrouver le résultat obtenu par la trigonométrie.

Ex 6 `Calcul`

Résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} (x^2+1)y' + y = 3 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Ex 7 `Calcul`

Résoudre sur $I =]1, +\infty[$, l'équation différentielle

$$(x \ln x)y' - y = -\frac{1 + \ln(x)}{x}$$

Ex 8 `moyen`

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(E)\ y' + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} y = \sqrt{x^2+1} - x$$

Ex 9 `Calcul`

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'' + y' - 2y = 8\sin(2x)$$

Ex 10 `Calcul`

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$y'' - 4y' + 4y = x\,\mathrm{ch}(2x)$$

Corrigé des exercices

$\boxed{Q\ 1}$ Ce complexe ne se met pas sous une forme trigonométrique simple. Utilisons la résolution algébrique. Soit $u = x + iy$ tel que $u^2 = z$, on doit avoir

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = 6 \\ xy & = 1 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} x^2 + (-y^2) & = 6 \\ x^2 \times (-y^2) & = -1 \end{cases}$$

Par conséquent, les réels x et y sont racines du trinôme

$$X^2 - 6X - 1 = 0$$

Le discriminant réduit de ce trinôme vaut $\Delta' = 9 + 1 = 10$, d'où les deux racines $X_1 = 3 + \sqrt{10} > 0$ et $X_2 = 3 - \sqrt{10} < 0$. On en déduit que

$$x = \pm\sqrt{\sqrt{10} + 3},\ y = \pm\sqrt{\sqrt{10} - 3}$$

Comme $xy = 1$, x et y sont de même signe. Les deux racines complexes sont donc $\{\alpha, -\alpha\}$ où $\boxed{\alpha = \sqrt{\sqrt{10} + 3} + i\sqrt{\sqrt{10} - 3}}$.

$\boxed{Q\ 2}$ Cherchons son discriminant réduit : $\Delta' = (2 + i)^2 - (7 + 4i) = -4 = (2i)^2$ Les deux racines sont donc

$$\boxed{z_1 = 2 + 3i,\ z_2 = 2 - i}$$

$\boxed{Q\ 3}$ Le discriminant réduit vaut $\Delta' = 4 - 8i = 4(1 - 2i)$. Cherchons d'abord une racine carrée complexe $Z = x + iy$ du complexe $z = (1 - 2i)$ par la méthode algébrique. On doit avoir $x^2 - y^2 = 1$ et $xy = -1$. et donc x^2 et $-y^2$ sont racines du trinôme $X^2 - X - 1 = 0$. Les racines de ce trinôme sont $X_1 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ et $X_2 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0$. Donc $x = \pm\sqrt{(\sqrt{5} + 1)/2}$ et $y = \pm\sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}$. Puisque $xy = -1$, x et y sont de signes opposés. Une racine carrée de $1 - 2i$ est donc $Z = \sqrt{(\sqrt{5} + 1)/2} - i\sqrt{(\sqrt{5} - 1)/2}$ et une racine carrée complexe de Δ' est alors $\delta = 2Z = \sqrt{2}\left[\sqrt{\sqrt{5} + 1} - i\sqrt{\sqrt{5} - 1}\right]$. Les deux racines du trinôme sont alors

$$\boxed{\begin{cases} z_1 & = \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5} - 1} + i(2 + \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5} + 1}) \\ z_2 & = -\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5} - 1} + i(2 - \sqrt{2}\sqrt{\sqrt{5} + 1}) \end{cases}}$$

$\boxed{Q\ 4}$ $z = 0$ est une solution évidente. Soit z une solution non-nulle. Mettons z sous forme trigonométrique : $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in [0,2\pi[$. On doit avoir :

$$\rho^4 e^{4i\theta} = 4\rho^2 e^{-2i\theta}$$

En prenant les modules, $\rho^4 = 4\rho^2$ d'où $\rho = 2$. Ensuite, $e^{4i\theta} = e^{-2i\theta}$, c'est à dire $e^{6i\theta} = 1$ et donc $\theta = \dfrac{2k\pi}{6}$, $(k \in \mathbb{Z})$. Comme $\theta \in [0,2\pi[$, on trouve que $k \in [\![0,5]\!]$. Les six solutions non-nulles sont donc

$$\{2e^{\frac{ik\pi}{3}};\ k \in [\![0,5]\!]\}$$

d'où l'ensemble des solutions que l'on peut mettre sous forme algébrique :

$$\boxed{\{0, 2, 1 + i\sqrt{3}, -1 + i\sqrt{3}, -2, -1 - i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3}\}}$$

$\boxed{Q\ 5}$ La fonction est dérivable (composée de fonctions dérivables) sur $I =]-\pi/2,\pi/2[$ et $\forall x \in I$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}} \times \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}} \times \frac{-2}{(\sin x+1)^2} \times \cos x \\ &= \frac{1}{2}\frac{-\cos x}{\sqrt{1-\sin x}\sqrt{1+\sin x}} \\ &= -\frac{\cos x}{2\sqrt{1-\sin^2 x}} \\ &= -\frac{\cos x}{2|\cos x|} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

puisque le cosinus est positif sur I. On en déduit qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$, $f(x) = C - \dfrac{x}{2}$. Pour $x = 0$, on trouve que $C = \pi/4$ et on a donc montré que

$$\forall x \in]-\pi/2,\pi/2[,\ \arctan\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}} = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$$

Retrouvons ce résultat par la trigonométrie. Utilisons la formule $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$ qui donne

$$\begin{cases} 1+\cos\theta &= 2\cos^2\frac{\theta}{2} \\ 1-\cos\theta &= 2\sin^2\frac{\theta}{2} \end{cases}$$

En utilisant également que $\sin(x) = \cos(\pi/2 - x)$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= \arctan\sqrt{\frac{1-\cos(\pi/2-x)}{1+\cos(\pi/2-x)}} \\ &= \arctan\sqrt{\tan^2(\pi/4 - x/2)} \\ &= \arctan\big[\tan(\pi/4 - x/2)\big] \\ &= \pi/4 - x/2 \end{aligned}$$

En effet, puisque $-\pi/2 < x < \pi/2$, $0 < \pi/4 - x/2 < \pi/2$, la tangente est positive et on peut simplifier $\arctan(\tan\theta)$.

$\boxed{Q\ 6}$ Cherchons d'abord l'ensemble de toutes les solutions de cette équation différentielle. Comme la fonction $x \mapsto x^2+1$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, cette équation a même ensemble de solutions que l'équation normalisée

$$y' + \frac{1}{x^2+1}y = \frac{3}{x^2+1}$$

Résolvons l'équation homogène associée :

$$(H)\ : y' + \frac{1}{x^2+1}y = 0$$

Une primitive de $a(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction arctan. Par conséquent,

$$\mathcal{S}_H = \left\{Ce^{-\arctan x};\ C \in \mathbb{R}\right\}$$

Une solution particulière évidente est la fonction constante égale à 3. L'ensemble de toutes les solutions de (E) est donc

$$\left\{3 + Ce^{-\arctan x};\ C \in \mathbb{R}\right\}$$

Soit y une solution du problème de Cauchy. Comme y est une solution de (E), il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = 3 + Ce^{-\arctan x}$. Comme $y(1) = 0$, on doit avoir $Ce^{-\pi/4} = -3$ d'où $C = -3e^{\pi/4}$ et donc

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ y(x) = 3(1 - e^{\pi/4 - \arctan x})}$$

$\boxed{Q\ 7}$ Sur l'intervalle I, l'équation est équivalente à l'équation normalisée

$$(E_n)\ : y' - \frac{1}{x\ln x}y = -\frac{\ln x + 1}{x^2 \ln x}$$

L'équation homogène associée a pour ensemble de solutions $\mathcal{S}_H = \{C\ln(x);\ C \in \mathbb{R}\}$. Cherchons une solution particulière de la forme $C(x)\ln(x)$ où C est une fonction dérivable sur I (variation de la constante). On sait que y sera solution si et seulement si

$$C(x) = -\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 \ln x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(\ln x)^2}$$

En intégrant par parties la deuxième primitive :

$$\begin{cases} u(x) = 1/x & u'(x) = -1/x^2 \\ v'(x) = 1/(x\ln^2 x) & v(x) = -1/\ln x \end{cases}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2(\ln x)^2} = -\frac{1}{x\ln x} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 \ln x}$$

on en déduit que

$$-\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 \ln x} - \frac{\mathrm{d}x}{x^2 \ln^2 x} = \frac{1}{x\ln x}$$

d'où la solution particulière $y(x) = 1/x$. Finalement, l'ensemble des solutions est :

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{C\ln x + \frac{1}{x};\ C \in \mathbb{R}\right\}}$$

$\boxed{Q\ 8}$ Cherchons les solutions de l'équation homogène associée : $y' + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}y = 0$. $A(x) = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{argsh}(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$, on en déduit

$$\mathcal{S}_H = \left\{Ce^{-\ln(x+\sqrt{x^2+1})};\ C \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\frac{C}{x+\sqrt{x^2+1}};\ C \in \mathbb{R}\right\}$$

Cherchons une solution particulière de (E) sous la forme $y(x) = \dfrac{C(x)}{x+\sqrt{x^2+1}}$ où C est une fonction dérivable. D'après la méthode de la variation de la constante, y est solution si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{C'(x)}{x+\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{x^2+1} - x$, c'est à dire $C'(x) = (\sqrt{x^2+1} - x)(\sqrt{x^2+1} + x) = 1$. On peut prendre $C(x) = x$ d'où $y(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+x}$. L'ensemble des solutions est donc :

$$\boxed{\left\{\frac{x}{x+\sqrt{x^2+1}} + \frac{C}{x+\sqrt{x^2+1}};\ C \in \mathbb{R}\right\}}$$

$\boxed{Q\ 9}$ L'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes, 1 et -2. On cherche une solution particulière sous la forme $a\sin(2x) + b\cos(2x)$ et on trouve finalement l'ensemble des solutions :

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \left\{-\frac{6}{5}\sin(2x) - \frac{2}{5}\cos(2x) + Ae^{x} + Be^{-2x};\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$

$\boxed{Q\ 10}$ L'équation caractéristique a une racine double $r = 2$, On cherche une solution particulière avec le second membre $f(x) = xe^{2x}/2 + xe^{-2x}/2$ avec le principe de superposition. On trouve finalement

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{12}x^3e^{2x} + \frac{1}{32}xe^{-2x} + \frac{1}{64}e^{-2x} + Ae^{2x} + Bxe^{2x};\ (A,B) \in \mathbb{R}^2\right\}}$$