Ex 1 `Calcul`

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^2-1} - \arcsin\left(\frac{1}{x}\right)$$

a. Déterminer le domaine de définition de f, et étudier ses variations.
b. Étudier les branches infines.
c. Étudier la dérivabilité de f en -1 et 1.

Ex 2 `Calcul`

Étudier la fonction définie par

$$f(x) = \ln(2 - e^{1/x})$$

Ex 3 `Calcul`

On considère la fonction définie par $f(x) = xe^x$.

a. Faire l'étude complète de f.
b. Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $[-1,+\infty[$ vers l'intervalle $J = [-1/e,+\infty[$. On note h cette restriction et on note W sa bijection réciproque : $W = h^{-1}$.
c. Montrer que W est dérivable sur l'intervalle $]-1/e,+\infty[$ et que $\forall x \in]-1/e,0[\cup]0,+\infty[$,

$$W'(x) = \frac{W(x)}{x\big(1+W(x)\big)}$$

Ex 4 `Calcul, amusant`

Une exploitation agricole utilise un certain type d'engrais qu'elle répand sur le sol. Une étude a montré qu'une fois répandu sur le sol, une partie γ de l'engrais est transmise sous forme de nitrate dans l'eau de la nappe phréatique. Ces nitrates sont ensuite dissous dans cette eau. On note Q_0 la quantité d'engrais répandu sur le sol à l'instant $t = 0$. On note $q(t)$ la quantité de nitrates qui passe dans l'eau et $f(t)$ la quantité de nitrate dissoute dans l'eau. L'étude a montré que les fonctions q et f vérifient pour $t \geq 0$, les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} q'(t) &= -\alpha q(t) \\ f'(t) &= \alpha q(t) - \beta f(t) \end{cases}$$

où $0 < \beta < \alpha$. A l'instant $t = 0$, $q(0) = \gamma Q_0$ et $f(0) = 0$. Déterminer la quantité maximale de nitrates présents dans l'eau au cours du temps. Que vaut cette quantité lorsque $\beta = \alpha/2$?

Ex 5 `Calcul`

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivables, ne s'annulant pas telles que la courbe $y = f(x)$ possède la propriété suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}$, la tangente à la courbe au point $(x,f(x))$ coupe l'axe des x en x' avec $x' - x = 1$.

Ex 6 `Facile, cours`

Résoudre sur l'intervalle $I =]0,\pi[$ l'équation différentielle $\sin t y' - \cos t y + 1 = 0$.

Ex 7 `Calcul, cours`

Résoudre sur $I =]0,+\infty[$ l'équation différentielle $2xy' + y = x^n$. où $n \in \mathbb{N}$.

Ex 8 `Facile, cours`

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' + y' - 2y = 8\sin(2x)$.

Ex 9 `Moyen`

a. On considère l'équation différentielle $(E)\ : ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ où $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, $a \neq 0$. Si y est solution de (E) sur l'intervalle $]0,+\infty[$, montrer que la fonction définie par $z(t) = y(e^t)$ est solution d'une équation différentielle du second ordre à coefficients constants.
b. Résoudre sur l'intervalle $I =]0,+\infty[$ l'équation différentielle $(E)\ : x^2y'' - xy' + y = 0$.
c. Déterminer les fonctions $f :]0,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$ deux fois dérivables vérifiant $\forall x > 0$, $f'(x) = f(1/x)$.

Corrigé des exercices

$\boxed{Q\ 1}$

a. Pour que $f(x)$ soit défini, il faut que $x^2-1 \geq 0$ et que $1/x \in [-1,1]$, c'est à dire que $x \in]-\infty,-1] \cup [1,+\infty$. Comme $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et que la fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$, la fonction f est dérivable sur les intervalles $]-\infty,-1[$ et $]1,+\infty[$. Soit alors $x \in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. On calcule

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{1-(1/x)^2}}(-1/x^2) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}(x+1/|x|)}$$

Par conséquent,

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x\sqrt{x^2-1}} > 0 & \text{si } x > 1 \\ \dfrac{x^2-1}{x} < 0 \text{ si } x < -1 \end{cases}$$

On a $f(x) \xrightarrow[x\to -1]{} \pi/2$ et $f(x) \xrightarrow[x\to 1]{} -\pi/2$. et $f(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} +\infty$. On trace alors le tableau de variations de f (à faire !)

b. Étudions la branche infinie lorsque $x \to +\infty$. On forme $f(x)/x = \sqrt{1-1/x^2} - \arcsin(1/x)/x \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm 1$. Pour $x > 1$, formons

$$f(x) - x = \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2} - \arcsin(1/x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}+x} - \arcsin(1/x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Par conséquent, la droite d'équation $y = x$ est asymptote en $+\infty$. Pour $x < -1$, formons

$$f(x) + x = \sqrt{x^2-1} - \sqrt{x^2} - \arcsin(1/x) = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}-x} - \arcsin(1/x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$$

Et donc la droite d'équation $y = -x$ est asymptote en $-\infty$.

c. Étudions la dérivabilité en -1. Puisque $f'(x) \xrightarrow[x\to -1]{} 0$, on en déduit que f est dérivable en -1 et que $f'(-1) = 0$. Puisque $f'(x) \xrightarrow[x\to 1]{} +\infty$, on en déduit que f n'est pas dérivable en 1 (tangente verticale).

$\boxed{Q\ 2}$ Pour que $f(x)$ soit défini, il faut que $x \neq 0$ et que $2 - e^{1/x} > 0$, c'est à dire que $x < 0$ ou alors que $x > 1/\ln 2$. On a donc $D_f =]-\infty,0[\cup]1/\ln 2,+\infty[$. La fonction f est dérivable sur ces deux intervalles et $\forall x \in D_f$,

$$f'(x) = \frac{1}{2-e^{1/x}} \times (-e^{1/x}) \times (-1/x^2) = \frac{e^{1/x}}{x^2(2-e^{1/x})} > 0$$

On calcule $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$, $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \ln 2$, $f(x) \xrightarrow[x\to 1/\ln 2]{} -\infty$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ d'où le tableau de variations de f (à tracer !). On voit que cette fonction se prolonge en 0 en une fonction continue $\widetilde{f}$ avec $\widetilde{f}(0) = \ln 2$. Étudions la dérivabilité en 0 du prolongement. Puisque $f'(x) \xrightarrow[x\to 0^{-1}]{} 0$, on en déduit par un théorème que $\widetilde{f}$ est dérivable en 0 et que $\widetilde{f}'(0) = 0$.

$\boxed{Q\ 3}$

a. $D_f = \mathbb{R}$. On calculer pour $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^x(1+x)$, et $f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$, $f(-1) = -1/e$, $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ d'où le tableau de variations de f (à dresser).

b. La restriction h de f à l'intervalle $[-1,+\infty[$ est continue et strictement croissante. Par conséquent, d'après le théorème de la bijection, h réalise une bijection de l'intervalle $[-1,+\infty[$ vers l'intervalle $]-1/e,+\infty[$.

c. Puisque $\forall x \in]-1/e,+\infty[$, $h'(x) \neq 0$, d'après un théorème, on sait que $W = h^{-1}$ est dérivable sur l'intervalle $]-1/e,+\infty[$ et que $\forall x \in]-1/e,+\infty[$, $W'(x) = \dfrac{1}{h'(W(x))} = \dfrac{1}{e^{W(x)}[1+W(x)]}$. Mais puisque $h(W(x)) = x$, on en déduit que $W(x)e^{W(x)} = x$ et donc pour $x \neq 0$, $e^{-W(x)} = W(x)/x$. D'où pour $x \neq 0$, $W'(x) = \dfrac{W(x)}{x[1+W(x)]}$.

$\boxed{Q\ 4}$ La première équation différentielle se résout immédiatement : $q(t) = \gamma Q_0 e^{-\alpha t}$. La fonction f vérifie donc :

$$f'(t) + \beta f(t) = \gamma\alpha Q_0 e^{-\alpha t}$$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est

$$\mathcal{S}_H = \{Ce^{-\beta t};\ C \in \mathbb{R}\}$$

Cherchons une solution particulière avec la méthode de la variation de la constante sous la forme $y_0(t) = C(t)e^{-\beta t}$. Puisque $\forall t \geq 0$ on doit avoir $C'(t)e^{-\beta t} = \gamma\alpha Q_0 e^{-\alpha t}$, on trouve que $y_0(t) = -\dfrac{\gamma\alpha Q_0}{\alpha-\beta}e^{-\alpha t}$. Par conséquent, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \geq 0$, $f(t) = Ce^{-\beta t} - \dfrac{\gamma\alpha Q_0}{\alpha-\beta}e^{-\alpha t}$. Puisque $f(0) = 0$, on trouve finalement que

$$\boxed{f(t) = \frac{\gamma\alpha Q_0}{\alpha-\beta}\left[e^{-\beta t} - e^{-\alpha t}\right]}$$

Calculons $f'(t) = \dfrac{\gamma\alpha Q_0}{\alpha-\beta}e^{-\alpha t}\left[\alpha - \beta e^{(\alpha-\beta)t}\right]$. On trouve que f' s'annule en $t_0 = \dfrac{\ln(\alpha/\beta)}{\alpha-\beta}$, que f est croissante sur $[0,t_0]$ puis décroissante sur $[t_0,+\infty[$. La quantité maximale de nitrates présent dans l'eau vaut donc $f(t_0)$, c'est à dire

$$\boxed{f_{max} = \frac{\gamma\alpha Q_0}{\alpha-\beta}\left[e^{-\beta\left(\frac{\ln(\alpha/\beta)}{\alpha-\beta}\right)} - e^{-\alpha\left(\frac{\ln(\alpha/\beta)}{\alpha-\beta}\right)}\right]}$$

Lorsque $\beta = \alpha/2$, cette expression se simplifie en $\boxed{f_{max} = \gamma Q_0/2}$.

$\boxed{Q\ 5}$ Soit f une telle fonction. L'équation de la tangente au point $(x,f(x))$ s'écrit

$$Y = f(x) + f'(x)(X - x)$$

Cette tangente coupe l'axe des x en x' vérifiant $0 = f(x) = f'(x)(x'-x)$. Puisque $x' - x = 1$, la fonction f doit donc vérifier :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) + f(x) = 0$$

et donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = Ce^{-x}$. On vérifie réciproquement que pour toute consante $C \neq 0$, ces fonctions f conviennent.

$\boxed{Q\ 6}$ Comme $\forall t \in I$, $\sin(t) \neq 0$, l'équation est équivalente à l'équation normalisée :

$$y' - \frac{\cos t}{\sin t}y = -\frac{1}{\sin t}$$

En posant $a(t) = -\dfrac{\cos t}{\sin t}$, une primitive de a sur I est $A(t) = -\ln(\sin t)$. Par conséquent, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\mathcal{S}_H = \{C\sin t;\ C \in \mathbb{R}\}$$

Cherchons une solution particulière de la forme $y_0(t) = C(t)\sin t$. La méthode de la variation de la constante dit qu'on doit avoir $\forall t \in I$, $C'(t)\sin t = -\dfrac{1}{\sin t}$, c'est à dire $C'(t) = -\dfrac{1}{\sin^2 t}$. On reconnaît la dérivée de cotan, et donc on peut prendre $C(t) = \operatorname{cotan} t$. Une solution particulière est donc $y_0(t) = \cos t$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est finalement :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{C\sin t + \cos t;\ C \in \mathbb{R}}$$

$\boxed{Q\ 7}$ Comme $\forall x \in I$, $2x \neq 0$, l'équation différentielle a même ensemble de solutions que l'équation normalisée

$$y' + \frac{1}{2x}y = \frac{x^{n-1}}{2}$$

Posons $a(x) = 1/2x$. Une primitive de a sur I est la fonction définie par $A(x) = \dfrac{1}{2}\ln x$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc $\mathcal{S}_H = \{\dfrac{C}{\sqrt{x}}; C \in \mathbb{R}\}$. Cherchons une solution particulière de la forme $Y(x) = C(x)/\sqrt{x}$. La méthode de la variation de la constante nous dit qu'on doit avoir $\forall x > 0$, $C'(x)/\sqrt{x} = x^{n-1}/2$, c'est à dire $C'(x) = x^{n-1/2}/2$. On peut prendre $C(x) = x^{n+1/2}/(2n+1)$ et donc $Y(x) = x^n/(2n+1)$. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est donc

$$\boxed{\mathcal{S} = \{\frac{C}{\sqrt{x}} + \frac{x^n}{2n+1}\}}$$

$\boxed{Q\ 8}$ On trouve que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est $\mathcal{S}_H = \{Ce^x + De^{-2x};\ (C,D) \in \mathbb{R}^2\}$ et chercher une solution particulière de la forme $y(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x)$. On trouve que

$$\mathcal{S} = \{Ce^x + De^{-2x} - \frac{6}{5}\sin(2x) - \frac{2}{5}\cos(2x)\}$$

$\boxed{Q\ 9}$

a. Supposons que y est une solution de (E). La fonction z de l'énoncé est deux fois dérivable sur I et on calcule pour $t \in I$:

$$\begin{cases} z(t) & = y(e^t) \\ z'(t) & = e^t y'(e^t) \\ z''(t) & = (e^t)^2 y''(e^t) + e^t y'(t) \end{cases}$$

En calculant $\alpha z''(t) + \beta z'(t) + \gamma z(t)$, on voit que si l'on choisit $\alpha = a$, $\beta = b - a$, $\gamma = c$, on peut utiliser le fait que y est solution de (E) : calculons donc

$$az''(t) + (b-a)z'(t) + cz(t) = a(e^t)^2 y''(e^t) + be^t y'(t) + cy(e^t) = 0$$

La fonction z est donc solution de l'équation différentielle

$$az'' + (b-a)z' + cz = 0$$

b. Soit y une solution de (E). En reprenant les calculs précédents, on trouve que z est solution de l'équation différentielle $z'' - 2z' + z = 0$ et donc il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(e^t) = z(t) = Ae^t + Bte^t$. Soit alors $x > 0$. En posant $t = \ln x$, on trouve que $y(x) = Ax + Bx\ln x$. On vérifie réciproquement que pour $(A,B) \in \mathbb{R}^2$, cette fonction est bien solution de l'équation différentielle (E).

c. Soit une telle fonction f. En dérivant la relation, on doit avoir :

$$\forall x > 0,\ f''(x) = -\frac{1}{x^2} f'(1/x) = -\frac{1}{x^2} f(x)$$

et donc f doit vérifier l'équation différentielle du second ordre $x^2 y'' + y = 0$. En utilisant ce qui précède, il doit exister $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x > 0$,

$$f(x) = A\sqrt{x}\cos\Bigl(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\Bigr) + B\sqrt{x}\sin\Bigl(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\Bigr)$$

En calculant $f'(x)$ et $f(1/x)$, on trouve ensuite que A et B doivent vérifier $A = \sqrt{3}B$ et donc que f est de la forme :

$$\forall x > 0,\ f(x) = A\sqrt{x}\Bigl[\sqrt{3}\cos\Bigl(\sqrt{3}2\ln x\Bigr) + \sin\Bigl(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x\Bigr)\Bigr] = 2A\sqrt{x}\sin\Bigl(\frac{\sqrt{3}}{2}\ln x + \frac{\pi}{3}\Bigr)$$

On vérifie réciproquement que pour $A \in \mathbb{R}$, cette fonction est bien solution.