Ex 1 `Facile`

Résoudre l'équation $\log_x(10) = 2\log_{10x}(10) + 3\log_{100x}(10)$.

Ex 2 `Facile`

Résoudre pour $x > 0$ l'équation $2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.

Ex 3 `Facile`

Résoudre l'équation $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

Ex 4 `Facile`

Résoudre l'inéquation $\ln\left|2x+1\right| + \ln\left|x+3\right| \leq \ln 3$.

Ex 5 `Moyen`

Soit la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc}]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right) \end{array} \right.$$

Montrer que la fonction f est bien définie et que $\forall x \in I =]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, on a les relations suivantes :

a) $\operatorname{th}\dfrac{f(x)}{2} = \tan\dfrac{x}{2}$;
b) $\operatorname{th} f(x) = \sin x$;
c) $\operatorname{ch} f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$:
d) $\operatorname{sh} f(x) = \tan x$.

Ex 6 `Moyen`

Montrer que $\forall x \neq 0$,

$$\operatorname{th} x = \frac{2}{\operatorname{th} 2x} - \frac{1}{\operatorname{th} x}$$

Calculer alors la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \operatorname{th}(2^k x)$$

Ex 7 `À faire, classique`

Soit un réel $a \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation :

$$\operatorname{ch} x + \cos a = 2\operatorname{sh} x + \sin a$$

Ex 8 `À faire, classique`

Montrez en dérivant que :

$$\forall x \in [0,1], \quad \arcsin\sqrt{x} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin(2x-1)$$

Retrouver ensuite ce résultat par la trigonométrie. (On pourra poser $x = \sin^2 u$).

Ex 9 `À faire, classique`

Montrez en étudiant la fonction que

$$\forall x \geq 0, \quad \arctan(\operatorname{sh} x) = \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$$

Retrouver ensuite ce résultat par la trigonométrie.

Ex 10 `Facile`

Etudiez la fonction f définie par :

$$f(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) - 2\arctan x$$

Corrigé des exercices

$\boxed{Q\ 1}$ Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions et montrons que $\boxed{\mathcal{S} = \{10^{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}}, 10^{\frac{-1-\sqrt{3}}{2}}\}}$.

$\subset$: Soit $x \in \mathcal{S}$, on doit avoir $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq 1/10$ et $x \neq 1/100$ pour que les logarighmes soient définis. Puisque $\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$, on doit avoir

$$\frac{\log 10}{\log x} = \frac{2\log 10}{\log(10x)} + \frac{3\log 10}{\log(100x)}$$

c'est à dire

$$\frac{1}{\log x} = \frac{2}{1+\log x} + \frac{3}{2+\log x}$$

En posant $X = \log x$, on a

$$\frac{1}{X} = \frac{2}{1+X} + \frac{3}{2+X}$$

c'est à dire $4X^2 + 4X - 2 = 0$, et donc $X \in \{\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\}$. et donc $x \in \{10^{\frac{-1+\sqrt{3}}{2}}, 10^{\frac{-1-\sqrt{3}}{2}}\}$.

$\supset$ À faire.

$\boxed{Q\ 2}$ Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions et montrons que $\boxed{\mathcal{S} = \{\frac{3}{2}\}}$.

$\subset$: soit $x \in \mathcal{S}$. On doit avoir $2^{2x}(1+1/2) = 3^{x-1/2}(1+3)$ c'est à dire $2^{2x-3} = 3^{x-3/2}$ et donc $e^{(2x-3)\ln 2} = e^{(x-3/2)\ln 3}$ et donc $(2x-3)\ln 2 = (x-3/2)\ln 3$ d'où $(2x-3)(\ln 2 - \ln 3/2) = 0$ d'où finalement $x = 3/2$.

$\supset$: à faire.

$\boxed{Q\ 3}$ Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions et montrons que $\boxed{\mathcal{S} = \{1,4\}}$.

$\subset$: soit $x \in \mathcal{S}$. On doit avoir $x > 0$ et $e^{\sqrt{x}\ln x} = e^{x\ln\sqrt{x}}$ c'est à dire $e^{\sqrt{x}\ln x - \frac{1}{2}x\ln x} = 1$ d'où nécessairement $(\sqrt{x} - x/2)\ln x = 0$ et par conséquent, $x = 1$ ou alors $x = 4$.

$\supset$: à faire.

$\boxed{Q\ 4}$ Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions et montrons que $\boxed{\mathcal{S} = [-7/2, -3[\cup]-3,-2] \cup [-3/2, -1/2[\cup]-1/2,0]}$.

$\subset$: soit $x \in \mathcal{S}$. Pour que les logarithmes soient définis, il faut que $x \neq -1/2$ et que $x \neq -3$. De plus, on doit avoir $\ln\left|\dfrac{(2x+1)(x+3)}{3}\right| \leq 0$ c'est à dire $\left|\dfrac{(2x+1)(x+3)}{3}\right| \leq 1$. donc $-3 \leq (2x+1)(x+3) \leq 3$ et donc nécessairement

$$\begin{cases} 2x^2 + 7x + 6 & \geq 0 \\ 2x^2 + 7x & \leq 0 \end{cases}$$

Les racines du premier trinôme sont -2 et $-3/2$. On sait que ce trinôme est positif à l'extérieur de ses racines. Les racines du deuxième trinôme sont 0 et $-7/2$ et il est négatif à l'intérieur de ces racines. Finalement, on doit avoir $x \in [-7/2, -3[\cup]-3,-2] \cup [-3/2, -1/2[\cup]-1/2,0]$.

$\subset$: à vérifier en remontant les calculs.

$\boxed{Q\ 5}$ Remarquons d'abord que dans l'intervalle de définition, $0 < (\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}) < \dfrac{\pi}{2}$ et donc que la tangente prend ses valeurs dans $]0,+\infty[$ et par conséquent que f est bien définie.

a) Puisque

$$\operatorname{th} X = \frac{e^{2X}-1}{e^{2X}+1}$$

En remplaçant, on trouve que

$$\operatorname{th}\frac{f(x)}{2} = \frac{\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}) - 1}{\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}) + 1}$$

et en développant $\sin(a+b)$, $\cos(a+b)$, on trouve le résultat.

b) On utilise la même expression de $\operatorname{th} x$ et l'on trouve:

$$\operatorname{th} f(x) = \frac{\tan^2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}) - 1}{\tan^2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}) + 1} = \sin^2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}) - \cos^2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}) = -\cos(x+\frac{\pi}{2}) = \sin x$$

où l'on a utilisé la formule $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.

c) Puisque $\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, on trouve que

$$\operatorname{ch} f(x) = \frac{\tan^2(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})+1}{2\tan(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{2\sin(\dots)\cos(\dots)} = \frac{1}{\sin(x+\frac{\pi}{2})} = \frac{1}{\cos x}$$

d) De la même façon,

$$\operatorname{sh} f(x) = \frac{\tan^2(\dots)-1}{2\tan(\dots)} = -\frac{\sin^2(\dots)-\cos^2(\dots)}{2\sin(\dots)\cos(\dots)} = \frac{-\cos(x+\frac{\pi}{2})}{\sin(x+\frac{\pi}{2})} = \tan x$$

$\boxed{Q\ 6}$ En utilisant la trigonométrie hyperbolique :

$$\frac{2}{\operatorname{th} 2x} - \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x} - \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} + \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} - \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \operatorname{th} x$$

En remplaçant dans la somme, on trouve

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k \left(\frac{2}{\operatorname{th} 2^{k+1}x} - \frac{2}{\operatorname{th} 2^k x} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{k+1}}{\operatorname{th} 2^{k+1}x} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{\operatorname{th} 2^k x} = \boxed{\frac{2^n}{\operatorname{th} 2^n x} - \frac{1}{\operatorname{th} x}}$$

$\boxed{Q\ 7}$ En passant aux exponentielles et en notant $X = e^x$, X doit vérifier l'équation du second degré :

$$X^2 + 2(\sin a - \cos a)X - 3 = 0$$

Le discriminant réduit vaut $\Delta' = (\sin a - \cos a)^2 + 3 > 0$. Puisque $X > 0$, il faut que

$$X = \sqrt{(\sin a - \cos a)^2 + 3} - (\sin a - \cos a)$$

On a bien $X > 0$ car $\sqrt{(\sin a - \cos a)^2 + 3} > |sina - \cos a|$. Alors

$$\boxed{x = \ln\left(\sqrt{4 - \sin 2a} - 2 + \sin 2a\right)}$$

$\boxed{Q\ 8}$ Considérons la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \arcsin\sqrt{x} - \dfrac{1}{2}\arcsin(2x-1)$. Elle est bien définie sur $[0,1]$ car $-1 \le 2x - 1 \le 1$. Elle est dérivable sur l'intervalle $]0,1[$ et

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}} - \frac{1}{\sqrt{4x-4x^2}} = 0$$

Cette fonction est donc constante sur l'intervalle $[0,1]$. En faisant $x = 0$, on trouve que $f(0) = \dfrac{\pi}{4}$. On retrouve ce résultat car on peut poser $x = \sin^2 u$ lorsque $x \in [0,1]$, avec $u \in [0,\frac{\pi}{2}]$. Alors

$$\arcsin(2x-1) = \arcsin(-\cos 2u) = -\arcsin(\cos 2u) = \arccos(\cos 2u) - \frac{\pi}{2} = 2u - \frac{\pi}{2}$$

et $\arcsin\sqrt{x} = \arcsin\sin u = u$.

$\boxed{Q\ 9}$ Considérons la fonction $f : [0,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \arctan(\operatorname{sh} x) - \arccos\left(\frac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$$

Elle est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et $\forall x > 0$,

$$f'(x) = \frac{\operatorname{ch} x}{1 + \operatorname{sh}^2 x} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}}}\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch}^2 x} = 0$$

Comme $f(0) = 0$, on trouve que $\forall x \in [0,+\infty[$, $f(x) = 0$. Par la trigonométrie : soit un réel $x \ge 0$. Comme $\dfrac{1}{\operatorname{ch} x} \in]0,1[$, il existe $\theta \in [0,\frac{\pi}{2}[$ tel que

$$\frac{1}{\operatorname{ch} x} = \cos\theta$$

Alors
$$\operatorname{sh} x = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta} - 1} = \tan\theta$$
et alors
$$\arctan(\operatorname{sh} x) = \arctan(\tan\theta) = \theta$$
Et d'autre part, on a bien
$$\arccos(\frac{1}{\operatorname{ch} x}) = \arccos(\cos\theta) = \theta(\theta \in [0,\pi])$$

$\boxed{Q\ 10}$ La fonction f est définie pour $x \notin \{-1,+1\}$ donc $D_f =]-\infty,-1[\cup]-1,1[\cup]1,+\infty[$. Comme la fonction f est impaire, on fait l'étude sur les intervalles $I_1 = [0,1[$ et $I_2 =]1,+\infty[$. Calculons sa dérivée :
$$\forall x \in I_1 \cup I_2, \quad f'(x) = \frac{2x^2+2}{x^4+2x^2+1} - \frac{2}{1+x^2} = 0$$
Par conséquent, $\exists C_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I_1,\ f(x) = C_1$ et $\exists C_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I_2,\ f(x) = C_2$. En faisant $x = 0$ et $x \to +\infty$, on trouve que $C_1 = 0$ et $C_2 = -\pi$. Montrons par la trigonométrie que
$$\forall x \in]-1,1[, \quad \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = 2\arctan x$$
Soit $x \in]-1,1[$. $\exists! \theta \in]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$ tel que $x = \tan\theta$. Alors
$$\frac{2x}{1-x^2} = \frac{\tan 2\theta}{1-\tan^2\theta} = \tan(2\theta)$$
Or $2\theta \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ donc
$$\arctan\frac{2x}{1-x^2} = 2\theta = 2\arctan x$$