Ex 1 Facile, technique

a. Résoudre l'équation $\cos x - \sqrt{3}\sin x = 1$.
b. Résoudre l'équation $(\sqrt{3}+1)\cos x + (\sqrt{3}-1)\sin x + \sqrt{3} - 1 = 0$. On pourra poser $t = \tan(x/2)$.

Ex 2 Facile

Soit un complexe z et un entier n vérifiant :

$$1 + z + \cdots + z^{n-1} = nz^n$$

Montrer que $|z| \leq 1$.

Ex 3 Facile, technique

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation

$$(1+iz)^5 = (1-iz)^5 \qquad (1)$$

b) En déduire les valeurs de $\tan\dfrac{\pi}{5}$ et $\tan\dfrac{2\pi}{5}$, que l'on exprimera sous la forme :

$$\sqrt{p + q\sqrt{n}}, \quad (n,p,q) \in \mathbb{Z}^2$$

c) En déduire la valeur de $\tan\dfrac{\pi}{10}$.

Ex 4 Facile

Déterminez le module et un argument des complexes $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$ et $\dfrac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{1-\cos\theta - i\sin\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

Ex 5 Facile, classique

On pose

$$A = \sin(\frac{\pi}{12}) \quad B = \cos(\frac{\pi}{12}) \quad C = \tan(\frac{\pi}{12})$$

En utilisant la trigonométrie, montrer que A vérifie une équation du second degré. Exprimer A, B , C en utilisant des racines carrées.

Ex 6 Facile

Trouver les complexes z qui vérifient

$$|z-1| = 1$$

Ex 7 Facile, classique

Résoudre les équations suivantes d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

(i) $1 + \dfrac{z+i}{z-i} + \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^3 = 0$

(ii) $(z+i)^n = (z-i)^n$

Indication : Poser $Z = \dfrac{z+i}{z-i}$

Ex 8 Facile

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^3 = \overline{z}$.

Ex 9 Classique, à faire

Calculer la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \cos\frac{k\pi}{3}$.

Ex 10 classique, à faire

Pour $n \geq 2$, on note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$ (racine nième de l'unité). Calculer les sommes suivantes:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp} \quad (p \in \mathbb{Z})$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \omega^k$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left|\omega^k - 1\right|$$

Corrigé des exercices

$\boxed{Q\ 1}$

a. Montrons que l'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S} = \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2k\pi - \frac{2\pi}{3};\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$\subset$: soit $x \in \mathbb{R}$ une solution. Réécrivons l'équation sous la forme : $2\big(\frac{1}{2}\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\big) = 1$. On doit donc avoir $\cos(\pi/3)\cos x - \sin(\pi/3)\sin x = 1/2$, c'est à dire $\cos(\pi/3 + x) = \cos(\pi/3)$. Par conséquent, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\pi/3 + x = \pi/3 + 2k\pi$, ou alors $\pi/3 + x = 2k\pi - \pi/3$, c'est à dire $x \in \{2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2k\pi - \frac{2\pi}{3};\ k \in \mathbb{Z}\}$.

$\supset$: S'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2k\pi$, on a bien $\cos x - \sqrt{3}\sin(x) = 1$. De même, s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2k\pi - \frac{2\pi}{3}$, on a $\cos x - \sqrt{3}\sin x = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2} = 1$.

b. Montrons que

$$\mathcal{S} = \{2k\pi - \frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2k\pi + \frac{\pi}{3};\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$\subset$: Soit $x \in \mathbb{R}$ une solution. On vérifie rapidement que $\tan(x/2)$ est défini (sinon $x = (2k+1)\pi$ et x ne serait pas solution). On peut donc poser $t = \tan(x/2)$. En utilisant les expressions de $\sin x$ et $\cos x$ vues en cours, on doit avoir

$$(\sqrt{3}+1)\frac{1-t^2}{1+t^2} + (\sqrt{3}-1)\frac{2t}{1+t^2} + (\sqrt{3}-1) = 0$$

ce qui donne l'équation du second degré suivante en t :

$$t^2 + (1-\sqrt{3})t - \sqrt{3} = 0$$

Le discriminant de cette équation vaut $\Delta = (1-\sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3} = (1+\sqrt{3})^2$ et les deux solutions sont donc $t_1 = -1$ et $t_2 = \sqrt{3}$. Par conséquent, $\tan(x/2) = -1$, c'est à dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ ou alors $\tan(x/2) = \sqrt{3} = \tan(\pi/3)$, c'est à dire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$.

$\supset$: on vérifie simplement l'inclusion réciproque.

$\boxed{Q\ 2}$ Par l'absurde, supposons que $|z| > 1$. Utilisons l'inégalité triangulaire : $n|z|^n = |1 + z + \dots + z^{n-1}| \le 1 + |z| + \dots + |z|^{n-1}$. Mais comme $|z| \ge 1$, $1 \le |z| \le |z|^2 \le \dots \le |z|^{n-1}$. Par conséquent,

$$n|z|^n \le n|z|^{n-1}$$

En divisant par $|z| > 0$, on trouve alors $|z| \le 1$, une absurdité. En conclusion, nous avons montré que $|z| \le 1$.

$\boxed{Q\ 3}$ a) Soit z solution de 1. $z \ne -i$ donc $1 - iz \ne 0$. Posons $U = \dfrac{1+iz}{1-iz}$. U doit vérifier $U^5 = 1$. En posant $\omega = e^{i\frac{2\pi}{5}}$, il existe $k \in [0{,}4]$ tel que :

$$U = \omega^k$$

Alors :

$$z = -i\frac{\omega^k - 1}{\omega^k + 1} = \tan\big(\frac{k\pi}{5}\big)$$

On vérifie réciproquement, que $z = \tan\dfrac{k\pi}{5}$ est solution pour $k \in [0{,}4]$.

b) Résolvons de façon différente l'équation (1) en développant les deux membres à l'aide du binôme :

$$\begin{aligned} 1 + 5(iz) + 10(iz)^2 + 10(iz)^3 + 5(iz)^4 + (iz)^5 &= 1 - 5(iz) + 10(iz)^2 - 10(iz)^3 + 5(iz)^4 - (iz)^5 \\ 5iz + 10(iz)^3 + (iz)^5 &= 0 \\ z\left[z^4 - 10z^2 + 5\right] &= 0 \end{aligned}$$

Et si z est une solution non-nulle, $Z = z^2$ est racine du trinôme

$$Z^2 - 10Z + 5 = 0$$

qui possède deux racines réelles :

$$Z_1 = 5 - 2\sqrt{5} \quad Z_2 = 5 + 2\sqrt{5}$$

et donc, les racines de (1) sont :

$$0, \quad \pm\sqrt{5+2\sqrt{5}}, \quad \pm\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

Comme $\tan\dfrac{k\pi}{5}$ est strictement positif pour $k = 1,2$, et que $\tan\dfrac{\pi}{5} < \tan\dfrac{2\pi}{5}$, on trouve que

$$\tan\frac{\pi}{5} = \sqrt{5-2\sqrt{5}} \quad \tan\frac{2\pi}{5} = \sqrt{5+2\sqrt{5}}$$

c) En utilisant la formule de trigonométrie :

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

avec $\theta = \dfrac{\pi}{10}$, et en posant $A = \tan\dfrac{\pi}{10}$, A doit vérifier :

$$\sqrt{5-2\sqrt{5}}A^2 + 2A - \sqrt{5-2\sqrt{5}} = 0$$

et A est alors la seule racine positive de ce trinôme :

$$A = \frac{-1+\sqrt{2}\sqrt{3-\sqrt{5}}}{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}$$

$\boxed{Q\ 4}$ On trouve $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $1 - i = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ d'où $z = 2^{10}e^{i\frac{35i\pi}{3}}$. Pour l'autre,

$$\frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1-\cos\theta-i\sin\theta} = \frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}}\frac{2\cos\frac{\theta}{2}}{-2i\sin\frac{\theta}{2}} = \operatorname{cotan}\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Il faut ensuite étudier le signe de $\operatorname{cotan}\frac{\theta}{2}$ pour trouver l'argument.

$\boxed{Q\ 5}$ En utilisant la formule de trigonométrie $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$, on trouve que $A^2 = \dfrac{1-\cos(\pi/6)}{2}$, c'est à dire $A = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ $(A > 0)$. On fait de même avec B en utilisant la formule $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$.

On peut également utiiser $z = e^{i\pi/12}$ et dire que $z^2 = e^{i\pi/6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{i}{2}$ et extraire une racine carrée sous forme algébrique.

$\boxed{Q\ 6}$ On cherche les points du plan qui se trouvent à distance 1 du point d'affixe 1. C'est le cercle centré en 1 de rayon 1 :

$$z = 1 + e^{i\theta}, \quad \theta \in [0,2\pi[$$

$\boxed{Q\ 7}$ En posant $Z = \dfrac{z+i}{z-i}$, Z vérifie $1 + Z + Z^2 + Z^3 = 0$, c'est à dire $Z = i, -1, -i$ (on vérifie que $Z \neq 1$ et alors $1 + Z + Z^2 + Z^3 = \dfrac{1-Z^4}{1-Z}$). On écrit ensuite que $z = i\dfrac{Z+1}{Z-1}$, et on trouve les trois solutions $z = 1,0,-1$.
Pour la deuxième équation, poser $U = \dfrac{z+i}{z-i}$, $U = \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, et alors $z = i\dfrac{U+1}{U-1}$. Après factorisation de l'angle moitié, on trouve que $z \in \{\operatorname{cotan}\frac{k\pi}{n}; k \in [0,n-1]\}$.

$\boxed{Q\ 8}$ $z = 0$ est une solution. Si $z \neq 0$ est solution, alors en multipliant par z on trouve que $z^4 = |z|^2 = 1$ d'où $z \in \{1,i,-1,-i\}$.
On vérifie réciproquement que ces solutions conviennent. L'ensemble des solutions est donc $\{0,1,i,-1,-i\}$.

$\boxed{Q\ 9}$ On calcule

$$U_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}e^{\frac{ik\pi}{3}} = \frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{2}\sum_{p=0}^{n-1}\left(\frac{e^{\frac{i\pi}{3}}}{2}\right)^k = \frac{1}{2^n}\frac{e^{\frac{i(n+1)\pi}{3}} - 2^n e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{\frac{i\pi}{3}} - 2}$$

Si on remarque que $e^{i\frac{\pi}{3}} - 2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} - 1$, on obtient que

$$S_n = \operatorname{Re}(U_n) = \boxed{\frac{1}{2^n\sqrt{3}}\sin\frac{n\pi}{3}}$$

$\boxed{Q\ 10}$ La première somme est géométrique de raison ω^p. La raison est $\neq 1$ ssi p n'est pas un multiple de n. Alors

$$S = \frac{\omega^{pn} - 1}{\omega^p - 1} = \boxed{0}$$

Si p est un multiple de n, on trouve $S = n$.
La deuxième somme se calcule grâce au binôme:

$$S = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \omega^k - \omega^n = (1 + \omega)^n - 1 = \boxed{-2^n \cos^n \frac{\pi}{n} - 1}$$

La troisième somme se calcule en remarquant que

$$|\omega^k - 1| = 2|\sin \frac{k\pi}{n}| = 2 \sin \frac{k\pi}{n}$$

(factorisation de l'angle moitié et le sinus est positif si $k \in [0,n-1]$). On introduit la somme des exponentielles imaginaires correspondante que l'on calcule et finalement,

$$U_n = 2 \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{ik\pi}{n}} = 2 \frac{e^{i\pi} - 1}{e^{i\frac{\pi}{n}} - 1} = \frac{2ie^{-\frac{i\pi}{2n}}}{\sin \frac{\pi}{2n}}$$

$$S = \mathrm{Im}(U_n) = \boxed{2 \operatorname{cotan}\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$$