Ex 1 `Facile, J.M. Ferrard`

Soient trois ensembles A, B et C. Montrez que

$$A \cup B = A \cap C \iff B \subset A \subset C$$

Ex 2

Soit E un ensemble et A,B,C trois parties de E. Montrer que

1. $(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$.
2. $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.
3. $(A \cap B) = (A \cap C)$ et $(B \setminus A) = (C \setminus A) \Rightarrow B = C$.

Ex 3 `J.M. Ferrard`

Soient deux ensembles E et F. Quelle relation y a-t-il

1. entre les ensembles $\mathcal{P}(E \cup F)$ et $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$?
2. entre les ensembles $\mathcal{P}(E \cap F)$ et $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$?
3. entre les ensembles $\mathcal{P}(E \times F)$ et $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$?

Ex 4

Soient E,F,G trois ensembles et deux applications $f : E \mapsto F$,
$g : E \mapsto G$. On définit une nouvelle application $h : E \mapsto F \times G$ par:

$$\forall x \in E, \quad h(x) = (f(x),g(x))$$

a) Montrer que si f ou g est injective, alors h est injective.
b) On suppose que f et g sont surjectives. Est-ce que h est surjective? (Si vous pensez que ce n'est pas toujours le cas, exhibez un contre-exemple).

Ex 5

Soit E un ensemble et $f : E \mapsto E$ une application . On suppose que $fofof = f$. Montrer que

$$(f \text{ est injective }) \iff (f \text{ est surjective})$$

Ex 6

Soient E,F,G trois ensembles et deux applications $f : E \mapsto F$,
$g : F \mapsto G$.
a) Montrer que si gof est injective et f surjective, alors g est injective.
b) Montrer que si gof est surjective et g injective, alors f est surjective.

Ex 7

Soit E un ensemble non-vide et $A \subset E$ une partie de E. On définit

$$\varphi_A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & X \cap A \end{array} \right.$$

a) Déterminer φ_A si $E = \{a,b\}$ et $A = \{a\}$. Dans ce cas, φ_A est-elle injective, surjective?

b) Montrer que (φ_A injective) $\Rightarrow (A = E)$

c) Montrer que (φ_A surjective) $\Rightarrow (A = E)$

Corrigé des exercices

$\boxed{Q\ 1}$

1. Montrons que $B \subset A$. Soit $x \in B$. Comme $x \in A \cup B$ et que $A \cup B = A \cap C$, on obtient que $x \in A \cap C$ et donc que $x \in A$;
2. Montrons que $A \subset C$. Soit $x \in A$. Comme $x \in A \cup B$, $x \in A \cap C$ et donc $x \in C$.

$\boxed{Q\ 2}$

1. Montrons que $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) \subset (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$. Soit $x \in (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$. Puisque $x \in A \cup B$, étudions les trois cas possibles:
   (a) $x \in A$ et $x \in B$, alors $x \in A \cap B$ et à fortiori, $x \in (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.
   (b) $x \in A$ mais $x \notin B$, alors puisque $x \in B \cup C$, il vient que $x \in C$ et alors $x \in A \cap C$ et à fortiori $x \in (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.
   (c) $x \in B$ mais $x \notin A$: ce cas se traite comme précédemment.
2. Montrons que $(A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A) \subset (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$. Soit $x \in (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$, il y a trois cas possibles:
   (a) $x \in A \cap B$, et alors $x \in A \cup B$, $x \in B \cup C$ et $x \in C \cup A$. Par conséquent, $x \in (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$.
   (b) $x \in B \cap C$
   (c) $x \in C \cap A$

   Les derniers cas se traitent comme le premier.

On a bien montré l'égalité des deux ensembles.

$\boxed{Q\ 3}$

1. Montrons que $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cup F)$. Soit $A \in \mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F)$. Étudions les deux cas possibles :
   (a) Si $A \in \mathcal{P}(E)$, cela signifie que $A \subset E$ et donc que $A \subset E \cup F$. Par conséquent, $A \in \mathcal{P}(E \cup F)$.
   (b) De même si $A \in \mathcal{P}(F)$.

   L'inclusion réciproque est fausse, comme le montre l'exemple $E = \{e\}$, $F = \{f\}$ (avec $e \neq f$) : $\mathcal{P}(E \cup F) = \{\emptyset, \{e\}, \{f\}, \{e, f\}\}$ et $\mathcal{P}(E) \cup \mathcal{P}(F) = \{\emptyset, \{e\}, \{f\}\}$.
2. Montrons que $\mathcal{P}(E \cap F) = \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.
   (a) $\mathcal{P}(E \cap F) \subset \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$. Soit $A \in \mathcal{P}(E \cap F)$. On a $A \subset E \cap F$. Donc puisque $A \subset E$, $A \in \mathcal{P}(E)$ et de même puisque $A \subset F$, $A \in \mathcal{P}(F)$. Par conséquent, $A \in \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$.
   (b) $\mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F) \subset \mathcal{P}(E \cap F)$. Soit $A \in \mathcal{P}(E) \cap \mathcal{P}(F)$. Comme $A \in \mathcal{P}(E)$, cela signifie que $A \subset E$. De même puisque $A \in \mathcal{P}(F)$, cela signifie que $A \subset F$. Donc $A \subset E \cap F$ et donc $A \in \mathcal{P}(E \cap F)$.
3. Il n'y a aucun rapport entre les deux ensembles, comme le montre le contre-exemple suivant : $E = \{e\}$ et $F = \{f\}$. $E \times F = \{(e, f)\}$, $\mathcal{P}(E \times F) = \{\emptyset, \{(e, f)\}\}$. D'autre part, $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{e\}\}$, $\mathcal{P}(F) = \{\emptyset, \{f\}\}$ et $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F) = \{(\emptyset, \emptyset), (\emptyset, \{f\}), (\{e\}, \emptyset), (\{e\}, \{f\})\}$.

$\boxed{Q\ 4}$ Supposons par exemple que f est injective. Montrons que h est injective: Soit $(x_1, x_2) \in E^2$ tels que $h(x_1) = h(x_2)$. Alors $(f(x_1), g(x_1)) = (f(x_2), g(x_2))$ et donc en particulier, $f(x_1) = f(x_2)$. Mais puisque f est injective, il vient que $x_1 = x_2$.
Considérons par exemple $E = F = G = \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x) = x$. Les deux applications f et g sont bien surjectives, et pourtant $(1, 2)$ n'a pas d'antécédent par h (il faudrait qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x = 1$ et $x = 2$ ce qui est impossible). Par conséquent, h n'est pas surjective dans ce contre-exemple.

$\boxed{Q\ 5}$

1. Montrons que f injective $\Rightarrow f$ surjective . Soit $y \in E$. Puisque $f(f \circ f(y)) = f(y)$ et que f est injective, il vient que $f \circ f(y) = y$. On a bien trouvé un antécédent de y par f: $f(f(y)) = y$. Donc f est surjective.
2. Montrons que f surjective $\Rightarrow f$ injective . Soit $(x, y) \in E^2$ tels que $f(x) = f(y)$. Puisque f est surjective, il existe un antécédent à x: $\exists x' \in E$ tel que $f(x') = x$. De même, $\exists y' \in E$ tel que $f(y') = y$. Mais alors $f(f(x')) = f(f(y'))$ et en appliquant f, $f(f(f(x'))) = f(f(f(y')))$. Mais comme $f \circ f \circ f = f$, il vient que $f(x') = f(y')$ et donc $x = y$. f est donc injective.

$\boxed{Q\ 6}$

a) Montrons que g est injective.
Soit $(X, Y) \in F^2$ tels que $g(X) = g(Y)$. Comme f est surjective, il existe $(x, y) \in E^2$ tels que $X = f(x)$ et $Y = f(y)$. Alors, $g \circ f(x) = g(X) = g(Y) = g \circ f(y)$. Mais puisque $g \circ f$ est injective, il vient que $x = y$. Alors $f(x) = f(y)$, et donc $X = Y$.
b) Montrons que f est surjective. Soit $X \in F$. Notons $Z = g(X)$. Comme $g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $Z = g \circ f(x)$. Posons $Y = f(x)$. On a:

$$g(Y) = g(f(x)) = Z \text{ et } g(X) = Z$$

Comme g est injective, il vient que $X = Y$ et par conséquent,

$$X = f(x)$$

On a donc exhibé un antécédent de X par f.

$\boxed{Q\ 7}$

b) Montrons le résultat par contraposée . Si $A \neq E$, il existe $b \in E \setminus A$. Posons alors $A' = A \cup \{b\}$. Alors

$$\phi_A(A) = A \text{ et } \phi_A(A') = A' \cap A = A$$

par conséquent, on a $A \neq A'$ avec $\phi_A(A) = \phi_A(A')$ ce qui montre que ϕ_A n'est pas injective.
c) Montrons le résultat par contraposée. Si $A \neq E$, il existe $b \in E \setminus A$. Posons $B = \{b\} \in \mathcal{P}(E)$ et montrons que B n'a pas d'antécédent par ϕ_A. Soit $X \in \mathcal{P}(E)$ un élément arbitraire de l'ensemble de départ de ϕ_A. $\phi_A(X) = X \cap A \subset A$ et donc $b \notin \phi_A(X)$. Par conséquent, $\phi_A(X) \neq B$. Donc ϕ_A n'est pas surjective.