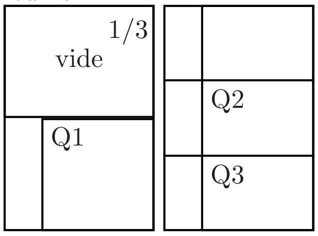
MPSI 2
DS 09

le 12 mai 2004

Présentation des copies :

- Utiliser des copies doubles uniquement ;
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille et une demi-page sur la première feuille pour les remarques du correcteur. Numéroter les feuilles doubles en indiquant le nombre total de feuilles doubles (par exemple 1/3, 2/3, 3/3). Indiquer le nom sur chaque double feuille.



- Les questions doivent être traitées dans l'ordre de l'énoncé, correctement numérotées et un trait horizontal doit les séparer ; si une question n'est pas traitée, laisser un espace blanc.
- Ne pas utiliser de crayon de papier. Tirer deux traits diagonaux à l'encre pour supprimer une partie de la copie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Passer souvent à la ligne et espacer les formules.

Rédaction mathématique :

- Annoncer avant une démonstration, le résultat à prouver et respecter les plans de démonstration.
- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie ;
- Pour montrer une équivalence, l'écrire en numérotant les propositions (i) et (ii) ;
- Chaque résultat annoncé doit être *justifié* en citant précisément un théorème du cours avec ses *hypothèses exactes*, ou en *citant le numéro d'une question précédente* du problème.
- Les résultats de calcul doivent être *simplifiés* et *encadrés.*
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases en Français :
- Les notations de l'énoncé doivent être respectées ;

1 Exercice 1

On considère l'équation différentielle sur $I = \mathbb{R}$:

$$(E) \quad y' + 2xy = 1$$

$\boxed{Q\ 1}$ On suppose que f est une solution de (E) que l'on ne cherchera pas à calculer pour l'instant. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f'(0)$.

$\boxed{Q\ 2}$ Déterminer pour $n \in \mathbb{N}^\star$, une relation entre $f^{(n+2)}$, $f^{(n+1)}$ et $f^{(n)}$.

$\boxed{Q\ 3}$ Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$, f admet un développement limité en 0 à l'ordre p de la forme :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{p} a_n x^n + o(x^p)$$

et trouver pour $n \in \mathbb{N}$, une relation entre a_{n+2} et a_n.

$\boxed{Q\ 4}$ Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$a_{2k+1} = (-1)^k \frac{4^k k!}{(2k+1)!}$$

et calculer de même a_{2k} en fonction de $f(0)$.

On considère la fonction

$$D : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\, \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

$\boxed{Q\ 5}$

a. Montrer que D est une solution de (E).

b. Déterminer l'ensemble de toutes les solutions de (E) et montrer qu'il existe une unique solution impaire.

2 Problème

On note $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes à coefficients réels et pour $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ le sous-espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit $\omega : [-1,1] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement positive. On pose :

$$\phi : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (P,Q) & \mapsto & \int_{-1}^1 P(t)Q(t)\omega(t)\, \mathrm{d}t \end{array} \right.$$

$\boxed{Q\ 6}$ Montrer que ϕ définit un produit scalaire sur E.

Dans la suite, on notera $(P \mid Q) = \phi(P,Q)$ et $\|P\| = \sqrt{(P \mid P)}$ la norme euclidienne associée.

$\boxed{Q\ 7}$ Justifier qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2, \quad n \neq m \Rightarrow (P_n \mid P_m) = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|P_n\| = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = n \end{cases}$$

On considère désormais une telle suite orthonormale de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\boxed{Q\ 8}$ Montrer que pour tout polynôme $P \in E$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\deg P < n \Rightarrow (P \mid P_n) = 0$$

$\boxed{Q\ 9}$ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, le polynôme P_n possède exactement n racines simples réelles distinctes dans l'intervalle $[-1,1]$. On pourra raisonner par l'absurde en supposant que P possède moins de $(n-1)$ racines réelles dans le segment $[-1,1]$ et considérer un polynôme Q qui garde un signe constant entre ces racines.

On peut donc écrire pour $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+1} = a_n(X - x_0)\dots(X - x_n)$$

où $-1 \leq x_0 < \dots < x_n \leq 1$ sont les racines simples du polynôme P_{n+1}.

$\boxed{Q\ 10}$ Montrer que $\forall i \in [\![0,n]\!]$, il existe un unique polynôme $L_i \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant

$$\forall j \in [\![0,n]\!], \quad L_i(x_j) = \delta_{ij}$$

$\boxed{Q\ 11}$

a. Montrer que les polynômes P_{n+1} et P'_{n+1} sont premiers entre eux.

b. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $F = \dfrac{P'_{n+1}}{P_{n+1}}$.

c. En déduire que $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $L_i = \dfrac{1}{P'_{n+1}(x_i)} \dfrac{P_{n+1}}{X - x_i}$.

On considère maintenant une fonction f continue sur le segment $[-1,1]$.

$\boxed{Q\ 12}$

a. Montrer qu'il existe un unique polynôme $L_f \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant

$$\forall i \in [\![0,n]\!], \quad L_f(x_i) = f(x_i)$$

et donner son expression à l'aide des polynômes L_i.

b. Montrer que l'application

$$\phi_n : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}([-1,1]) & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ f & \longmapsto & L_f \end{array} \right.$$

est linéaire et déterminer la restriction de ϕ_n au sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$.

$\boxed{Q\ 13}$ Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $F = \dfrac{1}{P_{n+1}}$ et en déduire que

$$\sum_{i=0}^{n} L_i \;=\; 1 \tag{1}$$

$\boxed{Q\ 14}$ Montrer que $\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2$, $i \neq j$, $(L_i \mid L_j) = 0$.

$\boxed{Q\ 15}$ En développant l'intégrale

$$\int_{-1}^{1} \Big(\sum_{i=0}^{n} L_i(x) \Big)^2 \omega(x)\, \mathrm{d}x$$

montrer que

$$\sum_{i=1}^{n} \|L_i\|^2 = \int_{-1}^{1} \omega(x)\, \mathrm{d}x$$

$\boxed{Q\ 16}$ Pour une fonction $g \in \mathcal{C}([-1,1])$, on note $\|g\|_\infty = \sup_{x \in [-1,1]} |g(x)|$.

a. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\|\phi_n(f) - P\| \leq C \|f - P\|_\infty$$

b. Montrer qu'il existe une constante $D > 0$ telle que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

$$\|\phi_n(f) - f\| \leq D \|f - P\|_\infty$$

3 Polynômes de Legendre

Dans cette partie, on suppose que la fonction poids ω est définie par $\forall x \in [-1{,}1]$, $\omega(x) = 1$.
On définit pour un entier $n \in \mathbb{N}$, le polynôme

$$R_n = (x^2 - 1)^n$$

On notera $R_n^{(j)}$ ses dérivées successives et en particulier $R_n^{(n)}$ sa dérivée nième.

$\boxed{Q\ 17}$ On pose pour $(p{,}q) \in \mathbb{N}^2$:

$$W(p{,}q) = \int_{-1}^{1} (t-1)^p (t+1)^q \ \mathrm{d}t$$

a. Etablir une relation entre $W(p{,}q)$ et $W(p+1{,}q-1)$ lorsque $q \geq 1$.

b. En déduire la valeur de $W(n{,}n)$ que l'on exprimera à l'aide de factorielles.

$\boxed{Q\ 18}$ On considère dans cette question un polynôme Q à coefficients réels quelconque.

a. Montrer rigoureusement l'égalité :

$$\int_{-1}^{1} Q(t) R_n^{(n)}(t)\ dt = (-1)^n \int_{-1}^{1} Q^{(n)}(t) R_n(t)\ dt \tag{2}$$

c. Calculer la valeur de l'intégrale

$$I = \int_{-1}^{1} \left(R_n^{(n)}(t)\right)^2\ dt$$

$\boxed{Q\ 19}$ Déterminer une suite de réels (λ_n) tels que si l'on définit la suite de polynômes (L_n) par :

$$L_n = \lambda_n R_n^{(n)}$$

alors cette suite est orthonormale.

Corrigé.

$\boxed{Q\ 1}$ Par récurrence:

$$\mathcal{P}(n) : f \in \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$$

$\mathcal{P}(0)$: Comme f est une solution, elle est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$.
$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$: $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - 2xf(x)$. Par hypothèse, f est $\mathcal{C}^n$ et donc $x \mapsto 1 - 2xf(x)$ l'est aussi. Donc puisque f' est de classe $\mathcal{C}^n$, f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.
D'après l'équation, en $x = 0$, on tire $f'(0) = 1$.

$\boxed{Q\ 2}$ Utilisons la formule de Leibnitz en dérivant $(n+1)$ fois l'équation différentielle:

$$f^{(n+2)} + 2\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{(k)} f^{(n+1-k)} = 0$$

et donc

$$f^{(n+2)} + 2(xf^{(n+1)} + (n+1)f^{(n)}) = 0 \tag{3}$$

$\boxed{Q\ 3}$ Soit $p \in \mathbb{N}$. Comme f est de classe $\mathcal{C}^p$, d'après la formule de Taylor-Young,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{p} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + o(x^p)$$

Donc f admet un $DL(0,p)$ avec $\boxed{a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}}$.
D'après la formule 3, en faisant $x = 0$, on trouve

$$f^{(n+2)}(0) + 2(n+1)f^{(n)}(0) = 0$$

d'où l'on tire

$$\boxed{a_{n+2} = -\frac{2}{n+2} a_n} \tag{4}$$

$\boxed{Q\ 4}$ Par récurrence:

$$\mathcal{P}(k) : a_{2k+1} = (-1)^k \frac{4^k k!}{(2k+1)!}$$

$\mathcal{P}(0)$: $a_1 = f'(0) = 1 = (-1)^0 \dfrac{4^0 0!}{1!}$.
$\mathcal{P}(k-1) \Rightarrow \mathcal{P}(k)$:

$$a_{2k+1} = -\frac{2}{2k+1} a_{2k-1} = -\frac{2(-1)^k 4^{k-1}(k-1)!}{(2k+1)(2k-1)!} = \frac{(-1)^k 2 \times 4^{k-1}(2k)(k-1)!}{(2k-1)!(2k)(2k+1)} = (-1)^k \frac{4^k k!}{(2k+1)!}$$

En reprenant la formule 4 avec $n = 2k-2$, on trouve

$$a_{2k} = -\frac{1}{k} a_{2(k-1)}$$

et alors

$$a_{2k} = \frac{-1}{k} \frac{-1}{(k-1)} \cdots \frac{-1}{k-(k-1)} a_0$$

et donc $\boxed{a_{2k} = \dfrac{(-1)^k}{k!} f(0)}$ puisque $a_0 = f(0)$.

$\boxed{Q\ 5}$

a. Comme la fonction définie par $f(t) = e^{t^2}$ est continue sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$ et que $0 \in I$, le théorème fondamental dit que la fonction $x \mapsto \int_0^x f(t)\,dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $I = \mathbb{R}$. D'après les théorèmes généraux, la fonction D est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $\mathbb{R}$. On calcule d'après le théorème fondamental, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$D'(x) = e^{-x^2} e^{x^2} - 2xe^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\,dt = 1 - 2xD(x)$$

ce qui montre que D est une solution particulière de (E).

b. L'équation différentielle (E) est une équation linéaire du premier ordre normalisée. Résolvons l'équation homogène associée :

$$(H) \quad y' + 2xy = 0$$

en posant $a(x) = 2x$, une primitive de a est $A(x) = x^2$ et alors l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\mathcal{S}_H = \{Ce^{-x^2} ; C \in \mathbb{R}\}$$

et comme D est une solution particulière de (E), l'ensemble des solutions de (E) est donc

$$\mathcal{S}_E = \{D(x) + Ce^{-x^2} ; C \in \mathbb{R}\}$$

Vérifions que D est impaire. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$D(-x) = e^{-x^2} \int_0^{-x} e^{t^2}\, dt = -e^{-x^2} \int_0^{x} e^{u^2}\, du = -D(x)$$

par le changement de variables $u = -x$. Nous avons donc montré l'existence d'une solution impaire. Soit f une solution de (E) impaire. Alors $\exists C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = D(x) + Ce^{-x^2}$$

Comme $f(0) = 0$, on en tire $C = 0$ et donc $f = D$. Nous avons ainsi montré l'unicité.

$\boxed{Q\ 6}$ La bilinéarité, la positivité, la symétrie sont simples à vérifier. Montrons que ϕ est définie : soit $P \in E$ tel que $\phi(P,P) = 0$ alors $\int_{-1}^{1} P^2(t)\omega(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Puisque la fonction $t \mapsto P^2(t)\omega(t)$ est positive, continue sur le segment $[-1,1]$ et d'intégrale nulle, d'après un théorème, cette fonction est nulle sur $[-1,1]$. Comme ω est strictement positive, on a donc $\forall t \in [-1,1]$, $P(t) = 0$. Le polynôme P admet une infinité de racines : il est nul.

$\boxed{Q\ 7}$ Utiliser l'algorithme de Gramm-Schmidt.

$\boxed{Q\ 8}$ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in E$ tel que $\deg(P) < n$. Puisque $\forall i \in [\![0,n-1]\!]$, $\deg(P_i) = i$, le système $S = (P_0, \dots, P_{n-1})$ est libre dans E_{n-1} et comme $\dim(E_n) = |S| = n$, ce système est une base de E_{n-1}. Le polynôme P se décompose dans cette base :

$$\exists!(\lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \text{ tels que } P = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i P_i$$

$$(P \mid P_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda\,(P_i \mid P_n) = 0$$

$\boxed{Q\ 9}$ Supposons que le polynôme P ne s'annule qu'au plus k fois dans le segment $[-1,1]$ en des points $a_1, \dots, a_k$ avec $k < n$. Lorsque l'ordre de multiplicité d'une racine a_i est pair, la fonction polynômiale P_n ne change pas de signe en a_i. Considérons uniquement les racines de multiplicité impaire de P_n notées $-1 \le x_1 < \dots < x_p \le 1$ en lesquelles le polynôme P s'annule en changeant de signe. Définissons le polynôme

$$Q = (X - x_1) \dots (X - x_p)$$

Quitte à considérer le polynôme $-Q$, on peut supposer que $\forall x \in [-1,1]$, $P(x)Q(x) \ge 0$. Puisque $\deg(Q) < n = \deg(P_n)$, d'après la question précédente, on doit avoir

$$(P_n \mid Q) = \int_{-1}^{1} P_n(x)Q(x)\omega(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

Mais la fonction $x \mapsto P_n(x)Q(x)\omega(x)$ étant continue positive et d'intégrale nulle sur le segment $[-1,1]$, elle doit être nulle d'après un théorème. Le polynôme P_n s'annulerait alors une infinité de fois (sur tous les intervalles $]x_i,x_{i+1}[$). Ce polynôme P_n possèderait une infinité de racines : il serait nul ce qui est absurde puisque $\deg(P_n) = n$.

$\boxed{Q\ 10}$

Unicité Soient deux polynômes L_i et L_i' vérifiant les hypothèses. Alors en posant $H = L_i - L_i'$, on a $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $H(x_i) = 0$. Comme H admet au moins $(n+1)$ racines distinctes et qu'il est de degré inférieur à n, il est nul et donc $L_i = L_i'$.

Existence Posons

$$L_i = \frac{\prod_{j\neq i}(X - x_j)}{\prod_{j\neq i}(x_i - x_j)}$$

Ce polynôme convient.

$\boxed{Q\ 11}$

a. Par l'absurde, s'il existait un diviseur commun D aux polynômes P_{n+1} et P'_{n+1}, comme le polynôme D possède au moins une racine complexe $\alpha \in \mathbb{C}$, on aurait $P_{n+1}(\alpha) = P'_{n+1}(\alpha) = 0$. Mais alors α serait une racine double du polynôme P_{n+1}, ce qui est faux puisqu'on a vu que toutes les racines de P_{n+1} étaient réelles et simples.

b. Rappelons que le coefficient associé à un pôle simple x_i d'une fraction $\frac{U}{V}$ vaut $\lambda_i = \frac{U(x_i)}{V'(x_i)}$.
La fraction F n'a que des pôles simples (les zéros de P_{n+1}). Elle se décompose donc sous la forme

$$\frac{P'_{n+1}}{P_{n+1}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_i}{X - x_i}$$

avec $\lambda_i = \dfrac{P'_{n+1}(x_i)}{P'_{n+1}(x_i)} = 1$. En multipliant par P_{n+1}, on trouve donc

$$P'_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \prod_{j\neq i}(X - x_j)$$

En faisant $x = x_i$, on obtient $\prod_{j\neq i}(x_i - x_j) = P'_{n+1}(x_i)$, d'où l'expression de L_i.

$\boxed{Q\ 12}$

a. **Unicité :** Soient deux polynômes L et L' vérifiant ces hypothèses. Alors en posant $H = L - L'$, on a $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $H(x_i) = 0$ et donc le polynôme H admet au moins $(n+1)$ racines distinctes. Comme il est de degré inférieur à n, il est nul et donc $L = L'$.
Existence : Posons

$$L = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i$$

Ce polynôme vérifie les hypothèses de l'énoncé.

b. Soient deux fonctions $(f,g) \in \mathcal{C}([-1,1])^2$ et deux scalaires $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Posons $L = \lambda\phi_n(f) + \mu\phi_n(g)$. Pour $i \in [\![0,n]\!]$, on calcule $L(x_i) = \lambda f(x_i) + \mu g(x_i) = (\lambda f + \mu g)(x_i)$. Par unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange, on a $L = \phi_n(\lambda f + \mu g)$ et donc $\phi_n(\lambda f + \mu g) = \lambda\phi_n(f) + \mu\phi_n(g)$.
Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Puisque $\deg P \leq n$ et que $\forall i \in [\![0,n]\!]$, $P(x_i) = P(x_i)$, le polynôme P est le polynôme interpolateur de Lagrange aux points $P(x_i)$ et donc $\phi_n(P) = P$. Par conséquent, la restriction de ϕ_n au sous-espace $\mathbb{R}_n[X]$ est l'identité.

$\boxed{Q\ 13}$ Cette fraction n'a que des pôles simples, $-1 < x_0 < \cdots < x_n$ et sa décomposition s'écrit donc :

$$\frac{1}{P_{n+1}} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i}{X - x_i}$$

où $\lambda_i = \dfrac{1}{P'_{n+1}(x_i)}$. Par conséquent, en multipliant par P_{n+1}, on trouve que

$$1 = \sum_{i=1}^{n} \frac{P_{n+1}}{P'_{n+1}(x_i)(X - x_i)} = \sum_{i=1}^{n} L_i$$

$\boxed{Q\ 14}$ Calculons pour $i \neq j$:

$$(L_i \mid L_j) = \frac{1}{P'_{n+1}(x_i)P'_{n+1}(x_j)} \int_{-1}^{1} P_{n+1}(x) \frac{P_{n+1}(x)}{(x - x_i)(x - x_j)} \omega(x)\, \mathrm{d}x$$

Comme $n + 1 \geq 2$, et que x_i et x_j sont des racines de P_{n+1}, $(X - x_i)(X - x_j)/P_{n+1}$ et le polynôme $\dfrac{P_{n+1}}{(X - x_i)(X - x_j)}$ est de degré $\leq n - 1$. D'après la question 8, l'intégrale est nulle.

$\boxed{Q\ 15}$ D'après la question 13, puisque $\forall x \in [-1,1]$, $\left(\sum_{i=0}^{n} L_i(x)\right)^2 = 1$,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} \omega(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} \Big(\sum_{i=0}^{n} L_i(x)\Big)^2 \omega(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} (L_i \mid L_j) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \|L_i\|^2\end{aligned}$$

$\boxed{Q\ 16}$

a. Soit un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$. D'après la question 12 b, $P = \phi_n(P)$. Par conséquent, d'après la question 12 a,

$$\phi_n(f) - P = \phi_n(f-P) = \sum_{i=0}^{n} \big[f(x_i) - P(x_i)\big] L_i$$

Calculons donc :

$$\begin{aligned}\|\phi_n(f) - P\|^2 &= \|\phi_n(f-P)\|^2 \\ &= \int_{-1}^{1} \Big[\sum_{i=0}^{n} \big(f(x_i) - P(x_i)\big) L_i(x)\Big]^2 \omega(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \big[f(x_i) - P(x_i)\big]\big[f(x_j) - P(x_j)\big] L_i(x) L_j(x)\,\omega(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \big[f(x_i) - P(x_i)\big]\big[f(x_j) - P(x_j)\big]\,(L_i \mid L_j) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \big[f(x_i) - P(x_i)\big]^2 \|L_i\|^2 \\ &\le \|f - P\|_\infty^2 \sum_{i=0}^{n} \|L_i\|^2 \\ &\le \|f - P\|_\infty^2 \int_{-1}^{1} \omega(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

On a donc la propriété avec la constante $C = \sqrt{\int_{-1}^{1} \omega(x)\,\mathrm{d}x}$.

b. En utilisant l'inégalité triangulaire (Minkowski),

$$\begin{aligned}\|\phi_n(f) - f\| &= \|\big(\phi_n(f) - P\big) + \big(P - f\big)\| \\ &\le \|\phi_n(f) - P\| + \|P - f\| \\ &\le C\|f - P\|_\infty + \|P - f\|\end{aligned}$$

Mais si $g \in \mathcal{C}([-1,1])$, $\forall x \in [-1,1]$, $g(x)^2 \le \|g\|_\infty^2$ et donc

$$\|g\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} g^2(x)\omega(x)\,\mathrm{d}x} \le \sqrt{\|g\|_\infty^2 \int_{-1}^{1} \omega(x)\,\mathrm{d}x} \le C\|g\|_\infty$$

Donc finalement

$$\|\phi_n(f) - f\| \le 2C\|f - P\|_\infty$$

Remarque : On peut montrer (théorème de Weierstrass) qu'il existe une suite de polynômes (Q_n) telle que $\|f - Q_n\|_\infty \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. L'inégalité précédente utilisée avec ces polynômes Q_n montre que la suite de polynômes d'interpolation $\big(\phi_n(f)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie

$$\|\phi_n(f) - f\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Q 17 a) En intégrant par parties :

$$W(p,q) = \left[\frac{(t+1)^q(t-1)^{p+1}}{p+1}\right]_{-1}^{1} - \frac{q}{p+1}\int_{-1}^{1}(t+1)^{q-1}(t-1)^{p+1}\,dt$$

et comme $q \geq 1$, le crochet est nul. On trouve donc :

$$\boxed{W(p,q) = -\frac{q}{p+1}W(p+1,q-1)}$$

b) On applique successivement cette relation de récurrence :

$$\begin{aligned} W(n,n) &= -\frac{n}{n+1}W(n+1,n-1) \\ &= +\frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}W(n+2,n-2) \\ &= \vdots \\ &= (-1)^n\frac{n(n-1)\dots 1}{(n+1)(n+2)\dots(2n)}W(2n,0) \end{aligned}$$

Mais

$$W(2n,0) = \int_{-1}^{1}(t-1)^{2n}\,dt = \frac{1}{2n+1}(-(-2)^{2n+1}) = \frac{2^{2n+1}}{2n+1}$$

Par conséquent,

$$W(n,n) = (-1)^n\frac{n(n-1)\dots 1}{(n+1)(n+2)\dots(2n)}\frac{2^{2n+1}}{2n+1}$$

En multipliant en haut et en bas par $n!$, on trouve finalement que

$$\boxed{W(n,n) = (-1)^n\frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n+1)!}}$$

Q 18 a) Montrons par récurrence la propriété :

$$\mathcal{P}(j) : \text{ si } j \in [0,n], \quad \int_{-1}^{1}Q(t)R_n^{(n)}(t)\,dt = (-1)^j\int_{-1}^{1}Q^{(j)}(t)R_n^{(n-j)}(t)\,dt$$

$\mathcal{P}(0)$ est vrai de façon triviale.
$\mathcal{P}(j) \Rightarrow \mathcal{P}(j+1)$: Soit $j \in [0,n-1]$ ($(j+1) \leq n$). D'après $\mathcal{P}(j)$, en intégrant par parties la deuxième intégrale :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1}Q(t)R_n^{(n)}(t)\,dt &= (-1)^j\left(\left[Q^{(j)}(t)R_n^{(n-j-1)}(t)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}Q^{(j+1)}(t)R_n^{(n-j-1)}(t)\,dt\right) \\ &= (-1)^{j+1}\int_{-1}^{1}Q^{(j+1)}(t)R_n^{(n-(j+1))}(t)\,dt \end{aligned}$$

Remarquons en effet que 1 et -1 sont des racines du polynôme R_n de multiplicité n, et donc que $\forall j \in [\![0,n-1]\!]$, $R_n^{(j)}(1) = R_n^{(j)}(1) = 0$. Donc le crochet est nul. La propriété demandée s'obtient alors en prenant $j = n$.
b) En utilisant a) :

$$I = (-1)^n\int_{-1}^{1}R_n^{(2n)}(t)R_n(t)\,dt$$

Mais comme $\deg R_n = 2n$, et que $R_n = x^{2n} + \dots$, on en déduit que $R_n^{(2n)} = (2n)!$. Par conséquent,

$$I = (-1)^n(2n)!\int_{-1}^{1}(t^2-1)^n\,dt = (-1)^n(2n)!W(n,n)$$

et finalement,

$$\boxed{I = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{2n+1}}$$

$\boxed{Q\ 19}$ Posons

$$\boxed{L_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^n n!}R_n^{(n)}}$$

Il est clair que $\deg L_n = n$ et que le coefficient dominant de L_n vaut $a_n = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\frac{1}{2^n n!}(2n)! > 0$. En utilisant la question précédente, on calcule

$$\|L_n\|^2 = \int_{-1}^{1} \frac{2n+1}{2}\frac{1}{2^{2n}(n!)^2}\left[R_n^{(n)}(t)\right]^2 \mathrm{d}t = \frac{2n+1}{2}\frac{1}{2^n(n!)^2}I = 1$$

Reste à vérifier que pour deux entiers $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on a bien $(L_n \mid L_p) = 0$. Supposons par exemple $p < n$. En utilisant la question 18 a, on calcule

$$(L_n \mid L_p) = \lambda_n \int_{-1}^{1} R_n^{(n)}(t)L_p(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^n\lambda_n \int_{-1}^{1} R_n(t)L_p^{(n)}(t)\,\mathrm{d}t$$

Mais comme $\deg L_p = p$, et que $n > p$, le polynôme $L_p^{(n)}$ est nul.
La suite de polynômes $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc orthogonale : ce sont les polynômes de Legendre.