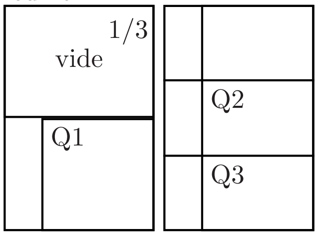
MPSI 2
DS 08

le 21 avril 2004

Présentation des copies :

- Utiliser des copies doubles uniquement ;
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille et une demi-page sur la première feuille pour les remarques du correcteur. Numéroter les feuilles doubles en indiquant le nombre total de feuilles doubles (par exemple 1/3, 2/3, 3/3). Indiquer le nom sur chaque double feuille.



- Les questions doivent être traitées dans l'ordre de l'énoncé, correctement numérotées et un trait horizontal doit les séparer ; si une question n'est pas traitée, laisser un espace blanc.
- Ne pas utiliser de crayon de papier. Tirer deux traits diagonaux à l'encre pour supprimer une partie de la copie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Passer souvent à la ligne et espacer les formules.

Rédaction mathématique :

- Annoncer avant une démonstration, le résultat à prouver et respecter les plans de démonstration.
- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie ;
- Pour montrer une équivalence, l'écrire en numérotant les propositions (i) et (ii) ;
- Chaque résultat annoncé doit être *justifié* en citant précisément un théorème du cours avec ses *hypothèses exactes*, ou en *citant le numéro d'une question précédente* du problème.
- Les résultats de calcul doivent être *simplifiés* et *encadrés.*
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases en Français :
- Les notations de l'énoncé doivent être respectées ;

1 Problème d'analyse

$\boxed{Q\ 1}$ Soient deux réels $a < b$ et une fonction g de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$. Montrer le *lemme de Lebesgue* :

$$\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$$

On fera pour cela une intégration par parties.

$\boxed{Q\ 2}$ Soit un entier non-nul $n \in \mathbb{N}^*$. On définit la fonction S_n sur $[0,\pi]$ par

$$S_n(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(2kt)$$

Montrer *sans utiliser de récurrence* que

$$\forall t \in]0,\pi[\quad S_n(t) = \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}$$

et calculer $S_n(0)$, $S_n(\pi)$.

$\boxed{Q\ 3}$ Calculer l'intégrale

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\,\mathrm{d}t$$

$\boxed{Q\ 4}$ On définit la fonction ϕ sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ par

$$\phi(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin t} & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Montrer que la fonction ϕ est dérivable en 0 et préciser $\phi'(0)$. Montrer ensuite que la fonction ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

$\boxed{Q\ 5}$ Déterminer la limite lorsque $n \to +\infty$ de la suite de terme général

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t)\sin(2n+1)t\,\mathrm{d}t$$

et en déduire la limite de la suite de terme général

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2n+1)t}{t}\,\mathrm{d}t$$

$\boxed{Q\ 6}$ Déterminer deux réels α et β tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\pi} (\alpha t + \beta t^2)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$

$\boxed{Q\ 7}$ En déduire que

$$2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} - \int_0^{\pi}(\alpha t + \beta t^2)S_n(\frac{t}{2})\,\mathrm{d}t$$

est un réel indépendant de n que l'on précisera.

$\boxed{Q\ 8}$ On définit la fonction h sur $]0,\pi]$ par

$$h(t) = \frac{(\alpha t + \beta t^2)}{\sin(t/2)}$$

Montrer que h se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$.

$\boxed{Q\ 9}$ Montrer que les suites de termes généraux

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad v_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

convergent et préciser leur limite.

2 Problème d'algèbre

Dans tout le problème, E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3.

$\boxed{Q\ 10}$ Soit u un endomorphisme de E et soient $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ deux entiers naturels. On considère l'application

$$w : \left\{ \begin{array}{ccc} \operatorname{Ker}(u^{i+j}) & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & u^j(x) \end{array} \right.$$

a. Montrer que $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Ker} u^i$.

b. En déduire que

$$\dim\big(\operatorname{Ker}(u^{i+j})\big) \leq \dim\big(\operatorname{Ker} u^i\big) + \dim\big(\operatorname{Ker} u^j\big)$$

$\boxed{Q\ 11}$ Soit un endomorphisme u de E vérifiant $u^3 = 0$ et $\operatorname{rg}(u) = 2$.

a. En utilisant deux fois la question 10b, montrer que $\dim\big(\operatorname{Ker} u^2\big) = 2$.

b. Montrer qu'il existe un vecteur a de E tel que la famille $\mathcal{B} = \big(u^2(a), u(a), a\big)$ est une base de E.

c. Écrire la matrice U de l'endomorphisme u et la matrice V de l'endomorphisme $u^2 - u$ dans cette base.

$\boxed{Q\ 12}$ Soit un endomorphisme u de E vérifiant $u^2 = 0$ et $\operatorname{rg}(u) = 1$.

a. Montrer qu'il existe un vecteur b non nul de E tel que $u(b) \neq 0$.

b. Montrer qu'il existe un vecteur c de $\operatorname{Ker} u$ tel que la famille $\big(u(b), c\big)$ soit libre, puis montrer que la famille $\big(b, u(b), c\big)$ est une base de E.

c. Écrire la matrice U' de u et la matrice V' de $u^2 - u$ dans cette base.

On considère maintenant une matrice $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On se propose de montrer que la matrice A est semblable à son inverse A^{-1}.

On pose pour cela $N = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ une matrice inversible telle que $P^{-1}AP = T = I_3 + N$.

$\boxed{Q\ 13}$ Montrer que la matrice T est inversible et en déduire que la matrice A est inversible.

$\boxed{Q\ 14}$ Calculer N^3 et montrer que $P^{-1}A^{-1}P = I_3 - N + N^2$.

$\boxed{Q\ 15}$ On suppose dans cette question que $N = 0$. Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

$\boxed{Q\ 16}$ On suppose dans cette question que $\operatorname{rg}(N) = 2$. On pose $M = N^2 - N$.

a. Montrer que la matrice N est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et en déduire une matrice semblable à la matrice M.

b. Calculer M^3 et déterminer $\mathrm{rg}(M)$.
c. Montrer que les matrices M et N sont semblables.
d. En déduire que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

$\boxed{Q\ 17}$ On suppose dans cette question que $\mathrm{rg}(N) = 1$ et on pose $M = N^2 - N$. Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

$\boxed{Q\ 18}$ On définit dans cette question la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{B} = (a,b,c)$ une base de E et u l'endomorphisme de E ayant pour matrice A dans la base $\mathcal{B}$.
a. Montrer que $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}_E)$ est un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 dont on donnera une base (e_1,e_2).
b. Justifier que la famille (e_1,e_2,c) est une base de E et écrire la matrice de u dans cette base.
c. Montrer que les matrices A et A^{-1} sont semblables.

$\boxed{Q\ 19}$ Réciproquement, toute matrice $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ semblable à son inverse est-elle nécessairement semblable à une matrice du type $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

Corrigé.

$\boxed{Q\ 1}$ Soit $\lambda > 0$. Comme g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$, nous pouvons intégrer par parties :

$$\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}\Big[g(a)\cos(\lambda a) - g(b)\cos(\lambda b)\Big] + \frac{1}{\lambda}\int_a^b g'(t)\cos(\lambda t)\ \mathrm{d}t$$

En majorant :

$$\Big|\int_a^b g(t)\sin(\lambda t)\ \mathrm{d}t\Big| \le \frac{2M_0}{\lambda} + \frac{1}{\lambda}\int_a^b |g'(t)|\ \mathrm{d}t$$

où $M_0 = \sup_{[a,b]}|g|$ (qui existe car g est continue sur le segment $[a,b]$). On déduit de cette majoration que $\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$.

$\boxed{Q\ 2}$ On calcule

$$U_n = 1 + 2\sum_{k=1}^n e^{2ikt} = 2e^{2it}\frac{e^{2int}-1}{e^{2it}-1} - 1 = 2e^{i(n+1)t}\frac{\sin nt}{\sin t} - 1$$

En effet, $t \in]0,\pi[\Rightarrow e^{2it} \neq 1$. Alors

$$S_n(t) = \mathrm{Re}(U_n(t)) = \frac{2\cos\big((n+1)t\big)\sin(nt) - \sin t}{\sin t}$$

et en utilisant la formule de trigonométrie

$$2\sin a\cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b) \text{ avec } a = (n+1)t \text{ et } b = nt$$

on trouve le résultat. On calcule

$$S_n(0) = S_n(\pi) = 2n+1$$

$\boxed{Q\ 3}$ L'intégrale est bien définie car la fonction $\dfrac{\sin(2n+1)t}{t}$ est continue par morceaux sur $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ (sa limite en 0 vaut $2n+1$). En utilisant la question 2,

$$J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ \mathrm{d}t + 2\sum_{k=1}^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2kt)\ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$$

$\boxed{Q\ 4}$ Utilisons le DL(0, 3) de sin :

$$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + o(t^3)$$

Pour $t \neq 0$,

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \frac{1}{t}\left[1 - \frac{1}{1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)}\right]\\ &= \frac{1}{t}\left[1 - (1 + \frac{t^2}{6} + o(t^2))\right]\\ &= -\frac{t}{6} + o(t)\end{aligned}$$

la fonction ϕ possède un $DL(0,1)$ de la forme $\phi(t) = a_0 + a_1 t + o(t)$. On en déduit donc que $\phi(t) \xrightarrow[t\to 0]{} a_0 = 0 = \phi(0)$, ce qui montre que la fonction de l'énoncé ($\phi(0)$ est défini dans l'énoncé) est *continue* en 0. De plus, cette fonction est dérivable en 0 avec $\phi'(0) = a_1 = -1/6$.
Montrons que la fonction ϕ' est continue en 0. On calcule pour $t \neq 0$,

$$\phi'(t) = \frac{t^2\cos t - \sin^2 t}{t^2\sin^2 t}$$

En utilisant les DL, le numérateur s'écrit

$$N(t) = t^2\left(1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)\right) - t^2\left(1 - \frac{t^2}{6} + o(t^2)\right)^2 = -\frac{1}{6}t^4 + o(t^4)$$

Alors, $N(t) \sim -\dfrac{1}{6}t^4$ et $D(t) \sim t^4$. Donc $\phi'(t) \xrightarrow[t\to 0]{} -\dfrac{1}{6} = \phi'(0)$ et par conséquent, ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}]$.
Remarque : Il serait maladroit de faire un développement limité de ϕ', car seule la *limite* en 0 de ϕ' nous intéresse : on profite des équivalents classiques !

$\boxed{Q\ 5}$ D'après la question 1, en notant

$$h(\lambda) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t)\sin(\lambda t)\ \mathrm{d}t$$

avec la fonction ϕ qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi/2]$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \phi(t)\sin(2n+1)t\ \mathrm{d}t = h(2n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

d'après le théorème sur l'image d'une suite car $2n+1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $h(\lambda) \xrightarrow[\lambda\to+\infty]{} 0$. Alors,

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\big((2n+1)t\big)\left[\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{\sin t}\right) + \frac{1}{\sin t}\right]\ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin((2n+1)t)\phi(t)\ \mathrm{d}t + J_n$$

et donc $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$.

$\boxed{Q\ 6}$ On calcule l'intégrale en faisant deux intégrations par parties, et l'on voit qu'il suffit de choisir $\alpha = -1$ et $\beta = \dfrac{1}{2\pi}$.

$\boxed{Q\ 7}$ On calcule alors

$$2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = 2\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\pi}(\alpha t + \beta t^2)\cos(kt)\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi}(\alpha t + \beta t^2)\left(S_n(t/2) - 1\right)\ \mathrm{d}t$$

Et finalement,

$$2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} - \int_0^{\pi}(\alpha t + \beta t^2)S_n(t/2)\ \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{3}$$

$\boxed{Q\ 8}$ Même technique qu'à la question Q4 avec ici, $h(0) = -2$ et $h'(0) = \dfrac{1}{\pi}$.

$\boxed{Q\ 9}$ En posant

$$\theta(\lambda) = \int_0^{\pi} h(t)\sin(\lambda t)\ \mathrm{d}t$$

$$K_n = \int_0^{\pi}(\alpha t + \beta t^2)S_n(\frac{t}{2})\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} h(t)\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)\ \mathrm{d}t = \theta(\frac{2n+1}{2})$$

D'après la question 1, $\theta((2n+1)/2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc $K_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Mais alors

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2} = \frac{K_n}{2} + \frac{\pi^2}{6} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}$$

On exprime alors

$$v_n = u_{2n+1} - \frac{1}{4}u_n$$

et par conséquent, $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi^2}{8}$.

$\boxed{Q\ 10}$

a. Soit $y \in \operatorname{Im} w$, il existe $x \in \operatorname{Ker} u^{i+j}$ tel que $y = w(x) = u^j(x)$. Alors $u^i(y) = u^{i+j}(x) = 0$ puisque $x \in \operatorname{Ker} u^{i+j}$.

b. Utilisons la formule du rang pour l'endomorphisme w :

$$\dim \operatorname{Ker} u^{i+j} = \dim \operatorname{Ker} w + \operatorname{rg} w$$

D'après a), $\operatorname{Im} w \subset \operatorname{Ker} u^i$ donc $\operatorname{rg}(w) \le \dim \operatorname{Ker} u^j$. D'autre part, $\operatorname{Ker} w \subset \operatorname{Ker} u^i$ (il est facile de voir qu'on a même l'égalité). Donc $\dim \operatorname{Ker} w \le \dim \operatorname{Ker} u^i$. On en déduit l'inégalité demandée.

$\boxed{Q\ 11}$

a. D'une part $u^3 = u^{2+1}$ donc d'après la question 10b,

$$3 = \dim \operatorname{Ker} u^3 \le \dim \operatorname{Ker} u^2 + \dim \operatorname{Ker} u$$

et puisque $\operatorname{rg}(u) = 2$, on en déduit d'après la formule du rang que $\dim \operatorname{Ker} u = 1$. Donc

$$2 \le \dim \operatorname{Ker} u^2$$

D'autre part, $u^2 = u^{1+1}$ donc d'après 10b,

$$\dim \operatorname{Ker} u^2 \le 1 + 1 = 2$$

Finalement, $\dim \operatorname{Ker} u^2 = 2$.

b. Puisque $\operatorname{Ker} u^2 \ne E$, il existe $a \in E \setminus \operatorname{Ker} u^2$. Montrons que le système $(u^2(a),u(a),a)$ est libre. Soient $\lambda,\mu,\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda u^2(a) + \mu u(a) + \gamma a = 0$. En appliquant u^2, on trouve que $\gamma u^2(a) = 0$ et puisque $u^2(a) \ne 0$, il vient que $\gamma = 0$. En appliquant ensuite u, on trouve que $\mu = 0$, puis ensuite que $\lambda = 0$. Puisque $|\mathcal{B}| = \dim E = 3$ et que $\mathcal{B}$ est libre dans E, c'est une base de E.

c. On trouve que

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{Q\ 12}$

a. Comme $\operatorname{rg}(u) = 1$, $\operatorname{Im}(u)$ possède une base (k) formée d'un seul vecteur. Puisque $k \in \operatorname{Im} u$, il existe un vecteur $b \in E$ tel que $u(b) = k \ne 0$. Le vecteur b est non nul (sinon on aurait $k = 0$).

b. Puisque $u^2 = 0$, $u^2(b) = 0$ ce qui montre que $u(b) \in \operatorname{Ker} u$. Comme $\dim \operatorname{Ker} u = 2$, on peut compléter le vecteur non nul $u(b)$ en une base de $\operatorname{Ker} u$ de la forme $\bigl(u(b),c\bigr)$. Montrons alors que $\bigl(b,u(b),c\bigr)$ est libre. Soit $\lambda,\mu,\gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda b + \mu u(b) + \gamma c = 0$ En appliquant u, puisque $u^2 = 0$ et que $c \in \operatorname{Ker}(u)$, il vient $\lambda u(b) = 0$, mais comme $u(b) \ne 0$, $\lambda = 0$. Ensuite, puisque $\mu u(b) + \gamma c = 0$ et que le système $\bigl(u(b),c\bigr)$ est une base de $\operatorname{Ker} u$, il est libre et donc $\mu = \gamma = 0$. Comme il y a trois vecteurs dans ce système libre et que $\dim E = 3$, ce système est une base.

c. On trouve

$$U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad V' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{Q\ 13}$ Soit $X \in \mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $TX = 0$, on a un système triangulaire avec des coefficients diagonaux non-nuls. On résout facilement un tel système pour montrer que $X = 0$. La matrice T est bien inversible. Puisque $A = PTP^{-1}$, on en déduit que A est inversible et que $A^{-1} = PT^{-1}P^{-1}$.

$\boxed{Q\ 14}$ On calcule

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $N^3 = 0$, d'après la formule de factorisation :

$$I = I - N^3 = (I + N)(I - N + N^2)$$

(les matrices I et N commutent). On en déduit que $T^{-1} = I - N + N^2$, c'est à dire

$$P^{-1}A^{-1}P = \bigl(P^{-1}AP\bigr)^{-1} = I - N + N^2$$

$\boxed{Q\ 15}$ On a dans ce cas $P^{-1}AP = I$ et alors $A = I$. Puisqu'alors $A^{-1} = I = A$, les deux matrices A et A^{-1} sont bien semblables.

$\boxed{Q\ 16}$

a. Soit une base $\mathcal{E}$ de E et u,v les uniques endomorphismes de E de matrice N,M dans la base $\mathcal{E}$. Puisque $u^3 = 0$ et que $\operatorname{rg}(u) = 2$, d'après la question 12, il existe une base $\mathcal{B}$ de E avec $U = \operatorname{Mat}\mathcal{B}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Donc N et U sont semblables. Puisque $\operatorname{Mat}\mathcal{B}(v) = U^2 - U$, on en déduit que M est semblable à $V = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b. Écrivons $M^3 = \left[N(N-I)\right]^3 = N^3(N-I)^3 = 0$ (les matrices commutent). Puisque M et V sont semblables, elles ont même rang. On calcule facilement le rang de V qui vaut 2. En conclusion, $\mathrm{rg}(M) = 2$.

c. On utilise le même raisonnement qu'en a. qui montre que M et V sont semblables. Par conséquent, M et N sont semblables.

d. Soit $Q \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $Q^{-1}NQ = N^2 - N$. Alors $Q^{-1}(I+N)Q = I + N^2 - N$ ce qui montre que A est semblable à $I - N + N^2$ et donc à A^{-1} d'après la question 14.

$\boxed{Q\ 17}$ Puisque $\mathrm{rg}(N) = 1$, ses des derniers vecteurs colonnes sont proportionnels, c'est à dire $\alpha = 0$ (si $C_2 = 0$ ou $\gamma = 0$ (si $C_2 \neq 0$). Le calcul direct montre alors que $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha\gamma \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et donc $N^2 = 0$. En utilisant alors la question 12, on trouve que N et U' sont semblables et que $N^2 - N$ et $-U'$ sont semblables. Puisque $\mathrm{rg}(N^2 - N) = \mathrm{rg}(-U') = 1$ et que $(N^2 - N)^2 = 0$, la matrice $N^2 - N$ est également semblable à U' et en raisonnant comme à la question précédente, on en déduit que A et A^{-1} sont semblables.

$\boxed{Q\ 18}$

a. On cherche les matrices colonnes X telles que $AX = 0$ ce qui conduit au système

$$\begin{cases} -y - z &= 0 \\ y + z &= 0 \end{cases}$$

et donc $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(e_1,e_2)$ est un plan vectoriel, avec $e_1 = a$ et $e_2 = b - c$ par exemple.

b. La matrice du système (e_1,e_2,c) dans la base (a,b,c) s'écrit $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Puisque $\mathrm{rg}(M) = 3$, le système est une base. La matrice de u dans cette base est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c. On se trouve dans la situation de la question 17 et donc A est semblable à A^{-1}.

$\boxed{Q\ 19}$ C'est faux. Par exemple pour $A = -I$, toute matrice semblable à A est $-A$. Il n'y a aucune matrice $T = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ semblable à A et pourtant $A = A^{-1}$, donc A est semblable à son inverse.