

MPSI 2

DS 07

le 17 mars 2004

Présentation des copies :

- Utiliser des copies doubles uniquement ;
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille et une demi-page sur la première feuille pour les remarques du correcteur. Numéroté les feuilles doubles en indiquant le nombre total de feuilles doubles (par exemple 1/3, 2/3, 3/3). Indiquer le nom sur chaque double feuille.

1/3 vide			
		Q2	
	Q1	Q3	

- Les questions doivent être traitées dans l'ordre de l'énoncé, correctement numérotées et un trait horizontal doit les séparer ; si une question n'est pas traitée, laisser un espace blanc.
- Ne pas utiliser de crayon de papier. Tirer deux traits diagonaux à l'encre pour supprimer une partie de la copie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Passer souvent à la ligne et espacer les formules.

Rédaction mathématique :

- Annoncer avant une démonstration, le résultat à prouver et respecter les plans de démonstration.
- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie ;
- Pour montrer une équivalence, l'écrire en numérotant les propositions (i) et (ii) ;
- Chaque résultat annoncé doit être *justifié* en citant précisément un théorème du cours avec ses *hypothèses exactes*, ou en *citant le numéro d'une question précédente* du problème.
- Les résultats de calcul doivent être *simplifiés* et *encadrés*.
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases en Français :
- Les notations de l'énoncé doivent être respectées ;

1 Problème 1

Pour tout réel $t \in \mathbb{R}$ tel que $t + \sin t \neq 0$, on pose

$$\psi(t) = \frac{1}{t + \sin t}$$

et on note pour $x > 0$,

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{t + \sin t}$$

Q 1 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $t + \sin t = 0$.

Q 2 Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et calculer f' . On étudiera le signe de f' .

Q 3 Étudier la parité de la fonction f .

On se propose d'étudier la limite de f lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Q 4 Montrer que $\forall x > 0$,

$$\left| f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \right| \leq \int_x^{2x} \frac{dt}{t(t + \sin t)}$$

Q 5

- Montrer qu'il existe un réel $m > 0$ tel que $\forall t \geq m, t + \sin t \geq \frac{t}{2}$.
- En déduire que f possède une limite finie l lorsque $x \rightarrow +\infty$ que l'on calculera.

On s'intéresse maintenant à la limite de f lorsque $x \rightarrow 0$.

Q 6 Montrer qu'il existe un réel $a \in \mathbb{R}$ et une fonction $\varepsilon :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall t > 0$,

$$\frac{1}{t + \sin t} = \frac{a}{t} + \frac{\varepsilon(t)}{t}$$

et $\varepsilon(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$.

Q 7 En déduire qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} l$. On précisera la valeur de l .

Q 8 On prolonge f par continuité en 0 en posant $f(0) = l$. Étudier la dérivabilité en 0 de ce prolongement.

2 Problème 2

L'objectif de ce problème est d'étudier une méthode de calcul approché d'intégrales, appelée *méthode de Simpson*.

Dans tout le problème, on identifiera polynômes et fonctions polynômiales associées.

Lorsque f est une fonction continue sur $[-1, 1]$, on notera

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(t) dt$$

$$S(f) = \frac{f(-1) + 4f(0) + f(1)}{3}$$

lorsque $f \in \mathcal{C}^n(I)$, on pose

$$M_n(f) = \sup_{t \in [-1, 1]} |f^{(n)}(t)|$$

Q 9 Déterminer $I(f)$ et $S(f)$ dans les cas qui suivent :

- $f(t) = \frac{1}{t+2}$

- b. f est une fonction continue et impaire sur $[-1,1]$.
- c. $f(t) = t^4$.
- d. $f(t) = \frac{1}{t^2 + 2t + 3}$.
- e. $f(t) = t \arctan(\sqrt{3}t)$.

Q 10 Montrer que pour toute fonction $P \in \mathbb{R}_3[X]$ polynômiale de degré inférieur ou égal à 3, on a $I(P) = S(P)$.

Q 11 On considère l'application

$$\phi : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow \\ P & \longmapsto \end{cases} \begin{matrix} \mathbb{R}^4 \\ (P(-1), P(0), P(1), P'(0)) \end{matrix}$$

- a. Montrer que ϕ est linéaire et déterminer son noyau.
- b. On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$. Déterminer des polynômes P_1, P_2, P_3 et P_4 de $\mathbb{R}_3[X]$ tels que $\phi(P_i) = e_i$ pour $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$.
- c. En déduire que ϕ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Q 12 On considère une fonction $f \in \mathcal{C}^4([-1,1])$. On note $f^\star \in \mathbb{R}_3[X]$ l'unique fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 3 telle que

$$\phi(f^\star) = (f(-1), f(0), f(1), f'(0))$$

On note H le polynôme $H = X^2(X^2 - 1)$.

- a. Soit un réel fixé $t \in [-1,1] \setminus \{-1, 0, 1\}$. On définit la fonction

$$h_t : \begin{cases} [-1,1] & \longrightarrow \\ x & \longmapsto \end{cases} \begin{matrix} \mathbb{R} \\ f(x) - f^\star(x) - KH(x) \end{matrix}$$

où la constante K est choisie de telle sorte que $h(t) = 0$. Montrer qu'il existe un réel $d \in [-1,1]$ tel que $h_t^{(4)}(d) = 0$.

- b. En déduire que

$$\forall t \in [-1,1], \quad |f(t) - f^\star(t)| \leq \frac{M_4(f)}{4!} t^2(1 - t^2)$$

- c. En déduire que

$$|I(f) - I(f^\star)| \leq \frac{M_4(f)}{90}$$

puis que

$$|I(f) - S(f)| \leq \frac{M_4(f)}{90}$$

- d. Pour la fonction définie par $f(t) = t^4$, vérifier que $|I(f) - S(f)| = \frac{M_4(f)}{90}$. La constante dans la majoration d'erreur précédente ne peut donc pas être améliorée.

Q 13 Soit $a < b$ et une fonction $g \in \mathcal{C}^4([a,b])$.

- a. Déterminer deux réels α et β tels que la fonction $\theta : \begin{cases} [-1,1] & \longrightarrow \\ x & \longmapsto \end{cases} \begin{matrix} \mathbb{R} \\ \alpha x + \beta \end{matrix}$ réalise une bijection de $[-1,1]$ vers $[a,b]$.
- b. En déduire que

$$\left| \int_a^b g(t) \, dt - \frac{b-a}{6} \left[g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right] \right| \leq \frac{(b-a)^5}{2880} M_4(g)$$

où $M_4(g) = \sup_{t \in [a,b]} |g^{(4)}(t)|$.

Q 14 On considère une fonction $f \in \mathcal{C}^4([0,1])$. Trouver une expression S_n ne faisant intervenir que des calculs $f(x_k)$ telle que

$$\left| \int_0^1 f(x) \, dx - S_n \right| \leq \frac{CM_4(f)}{n^4}$$

où C est une constante indépendante de n et de f .

Corrigé.

Q 1 On étudie la fonction définie par $k(t) = t + \sin t$ dérivable de dérivée $k'(t) = 1 + \cos(t) \geq 0$. Comme la dérivée ne s'annule qu'en des points isolés ($t = (2p + 1)\pi$), k est *strictement* croissante sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de la bijection, la fonction k réalise une bijection de I vers $[0, +\infty[$ (car $k(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} +\infty$ et $k(0) = 0$.) Donc 0 possède un unique antécédent qui est 0.

Q 2 Sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$, la fonction ψ est continue. Définissons l'intervalle $J =]0, +\infty[$. Comme les fonctions $u : \begin{cases} J & \longrightarrow & I \\ x & \longmapsto & x \end{cases}$ et $v : \begin{cases} J & \longrightarrow & I \\ x & \longmapsto & 2x \end{cases}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ de J vers I , d'après le théorème fondamental, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $J =]0, +\infty[$ et $\forall x \in J$,

$$f'(x) = \frac{2}{2x + \sin(2x)} - \frac{1}{x + \sin x}$$

Comme la fonction f' est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J (d'après Q1, $k(t)$ ne s'annule pas sur J), on en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur J . Après simplification, $\forall x \in J$,

$$f'(x) = \frac{2 \sin x (1 - \cos x)}{(x + \sin x)(2x + \sin 2x)}$$

et puisque $\forall x > 0$, $(1 - \cos x) \geq 0$, $f'(x)$ est de même signe que $\sin x$. Par conséquent, $f' \geq 0$ sur les intervalles $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ et $f' \leq 0$ sur les intervalles $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$.

Q 3 Soit $x > 0$. Calculons

$$f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \psi(t) dt = - \int_u^{2u} \psi(-u) du = \int_u^{2u} \psi(u) du = f(x)$$

(changement de variables $u = -t$ et ψ est impaire). Donc f est paire.

Q 4 Pour $x > 0$,

$$\left| f(x) - \int_x^{2x} \frac{dt}{t} \right| = \left| \int_x^{2x} \frac{-\sin t}{t(t + \sin t)} \right| \leq \int_x^{2x} \frac{|\sin t|}{t(t + \sin t)} dt$$

car $\forall t \in [x, 2x]$, $t > 0$ et donc $t + \sin t > 0$ (voir Q1). De plus, puisque $\forall t \in [x, 2x]$, $\frac{|\sin t|}{t(t + \sin t)} \leq \frac{1}{t(t + \sin t)}$, en intégrant cette inégalité, on obtient l'inégalité de l'énoncé.

Q 5

- Considérons la fonction définie par $\theta(t) = \frac{t + \sin t}{t}$. Puisque $\theta(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 1$, il existe $m > 0$ tel que $\forall t \geq m$, $\theta(t) \geq \frac{1}{2}$ d'où l'inégalité de l'énoncé.
- En reprenant la majoration précédente pour $x \geq m$,

$$\left| f(x) - [\ln t]_x^{2x} \right| \leq \int_x^{2x} \frac{2}{t^2}$$

Alors

$$|f(x) - \ln 2| \leq \left[-\frac{2}{t} \right]_x^{2x} = \frac{1}{x}$$

par le théorème de majoration, $f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} \span style="border: 1px solid black; padding: 2px;">\ln 2.$

Q 6 Puisque $\frac{t + \sin t}{t} = 1 + \frac{\sin t}{t} \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 2$, en posant $\varepsilon(t) = \frac{t}{t + \sin t} - \frac{1}{2}$, on a bien $\varepsilon(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$ et $\forall t > 0$, $\frac{1}{t + \sin t} = \frac{1}{2t} + \frac{\varepsilon(t)}{t}$.

Q 7 Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\varepsilon(t) \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in]0, \alpha[$, $|\varepsilon(t)| \leq \varepsilon$. Soit alors $x \in]0, \alpha[$, majorons

$$\left| \int_x^{2x} \frac{dt}{t + \sin t} - \int_x^{2x} \frac{dt}{2t} \right| \leq \int_x^{2x} \left| \frac{1}{t + \sin t} - \frac{1}{2t} \right| dt \leq \int_x^{2x} \frac{\varepsilon}{t} dt = \frac{\varepsilon \ln 2}{2}$$

Par conséquent, puisque $\int_x^{2x} \frac{1}{2t} dt = \frac{\ln 2}{2}$,

$$\left| \int_x^{2x} \frac{dt}{t + \sin t} - \frac{\ln 2}{2} \right| \leq \frac{\varepsilon \ln 2}{2} \leq \varepsilon$$

Nous avons donc montré que $\boxed{f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{\ln 2}{2}}$.

Q 8 On montre rigoureusement que

$$f'(x) = \frac{2 \sin x (1 - \cos x)}{(x + \sin x)(2x + \sin 2x)} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{8}$$

et puisque $f'(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, d'après le théorème de prolongement dérivable, on en déduit que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$.

Q 9

a. $I(f) = \int_{-1}^1 \frac{1}{t+2} dt = \left[\ln|t+2| \right]_{-1}^1 = \boxed{\ln 3}$. $S(f) = \boxed{\frac{10}{9}}$.

b. $\boxed{I(f) = 0}$ (voir l'exercice du cours), $\boxed{S(f) = 0}$.

c. $I(f) = 2 \int_0^1 t^4 dt = \boxed{\frac{2}{5}}$, $\boxed{S(f) = \frac{2}{3}}$.

d. $\boxed{S(f) = \frac{2}{9}}$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{(t+1)^2 + 2} dt &= \int_{-1}^1 \frac{1}{(t+1)^2 + 2} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1}{\left(\frac{t+1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{u^2 + 1} du \quad (u = \frac{t+1}{\sqrt{2}}, \quad du = \sqrt{2} dt) \\ &= \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \sqrt{2}} \end{aligned}$$

e. $\boxed{S(f) = \frac{2\pi}{9}}$. Puisque f est paire, $I(f) = 2 \int_0^1 t \arctan(\sqrt{3}t) dt$ et en intégrant par parties (u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$):

$$\begin{cases} u(x) = \arctan(\sqrt{3}t) & u'(x) = \frac{\sqrt{3}}{3t^2 + 1} \\ v'(x) = t & v(x) = \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 t \arctan(\sqrt{3}t) dt &= \left[\frac{t^2}{2} \arctan(\sqrt{3}t) \right]_0^1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \int_0^1 \frac{t^2}{3t^2 + 1} dt \\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{3t^2 + 1 - 1}{3t^2 + 1} dt \\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{1}{(\sqrt{3}t)^2 + 1} dt \\ &= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{6} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{u^2 + 1} du \quad (u = \sqrt{3}t) \\ &= \frac{2\pi}{9} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

et donc $\boxed{I(f) = \frac{4\pi}{9} - \frac{1}{\sqrt{3}}}$.

Q 10 Les fonctions polynômiales $P(x) = x$ et $P(x) = x^3$ étant impaires, d'après la question 9, $S(P) = I(P) = 0$.

Pour $P(t) = 1$, $S(P) = I(P) = 2$ et pour $P(t) = t^4$, d'après la question 9 on a également $S(P) = I(P) = \frac{2}{5} \cdot I$ et S étant linéaires, on en déduit que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_4[X]$, $I(P) = S(P)$.

Q 11

- La linéarité ne pose pas de problème. Soit $P \in \text{Ker}(\phi)$, Puisque $P(0) = P'(0) = 0$, 0 est racine double de P et donc X^2/P . Puisque $P(1) = P(-1) = 0$, $(X-1)$ et $(X+1)$ divisent également P . On en déduit que $X^2(X-1)(X+1)$ divise P . Donc il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = X^2(X-1)(X+1)Q$, mais en examinant les degrés, $\deg(Q) = \deg(P) - 4 < 0$ et donc $Q = 0$ ce qui montre que $P = 0$. Par conséquent, $\text{Ker}(\phi) = \{0\}$ et ϕ est injective.
- $P_1(0) = P'_1(0) = P_1(1) = 0$ donc P_1 est divisible par $X^2(X-1)$. Il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que $P_1 = aX^2(X-1)$ et comme $P(-1) = 1$, on trouve que $a = -1/2$ d'où $P_1 = \frac{-1}{2}X^2(X-1)$. On vérifie réciproquement que $\phi(P_1) = e_1$. De la même façon, on trouve $P_3 = \frac{1}{2}X^2(X+1)$. Comme $P_2(-1) = P_2(1) = 0$, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_2 = (X-1)(X+1)Q$ et en examinant les degrés, il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $Q = aX + b$, donc $P_2 = (aX + b)(X^2 - 1)$. On calcule $P'(0) = a$ et $P(0) = -b$ d'où $P_2 = 1 - X^2$. Puisque $P_4(-1) = P_4(0) = P_4(1) = 0$, il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P_4 = aX(X-1)(X+1)$ et on calcule alors $P'_4(0) = -a$ d'où $P_4 = -X(X-1)(X+1)$. On vérifie réciproquement que ces polynômes conviennent.
- Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, le polynôme $P = aP_1 + bP_2 + cP_3 + dP_4$ vérifie $\phi(P) = (a,b,c,d)$ puisque ϕ est linéaire.

Q 12

- Il s'agit d'une utilisation répétée du théorème de Rolle. Rappelons ce théorème: si une fonction f est continue sur le segment $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, avec $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$. Ici, puisque $h_t(-1) = h_t(0) = h_t(1) = h_t(t) = 0$, on trouve trois zéros *distincts* de h'_t . Il est important de voir que ces zéros sont distincts également de $-1, 0, 1, t$. Puisque $h'_t(0) = 0$, on trouve finalement quatre zéros distincts de h'_t et en réappliquant Rolle à h'_t , on trouve 3 zéros distincts de h''_t puis 2 zéros distincts de $h^{(3)}_t$ et enfin au moins un zéro de $h^{(4)}_t$. Il est loisible d'appliquer Rolle aux fonctions précédentes puisque h_t est de classe $\mathcal{C}^4$ sur $[-1,1]$.
- Pour $t \in [-1,1] \setminus \{-1,0,1\}$, il existe donc $c_t \in]-1,1[$ tel que $h^{(4)}_t(c_t) = 0$. Mais on calcule

$$h^{(4)}_t(x) = f^{(4)}(x) - 24K$$

et donc $K = \frac{f^{(4)}(c_t)}{24}$. Puisque $h_t(t) = 0$, on en déduit que

$$|f(t) - f^*(t)| = \frac{|f^{(4)}(c_t)|}{24} t^2(1-t^2) \leq \frac{M_4(f)}{24} t^2(1-t^2)$$

Cette inégalité reste valable pour $t \in \{-1,0,1\}$ puisque le membre droit vaut 0 en ces points.

- Majorons en utilisant l'inégalité précédente:

$$\begin{aligned} |I(f) - I(f^*)| &= \left| \int_{-1}^1 [f(t) - f^*(t)] dt \right| \\ &\leq \int_{-1}^1 |f(t) - f^*(t)| dt \\ &\leq \int_{-1}^1 \frac{M_4(f)}{24} t^2(1-t^2) dt \\ &= \frac{M_4(f)}{90} \end{aligned}$$

On a calculé l'intégrale

$$\int_{-1}^1 t^2(1-t^2) dt = 2 \int_0^1 t^4 - t^2 dt = 2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{15}$$

On a vu à la question 10 que

$$I(f^*) = S(f^*) = S(f)$$

puisque f^* est une fonction polynômiale de degré inférieur ou égal à 3 et que f prend les mêmes valeurs que f^* en $-1, 0, 1$.

- d. En reprenant les calculs de la question 9c, pour $f(t) = t^4$, on a trouvé que $|I(f) - S(f)| = \frac{4}{15}$ et pour cette fonction $M_4(f) = 4!$ donc $\frac{M_4(f)}{90} = \frac{4}{15}$. L'inégalité précédente est une égalité dans ce cas.

Q 13

- a. On doit choisir α et β tels que

$$\begin{cases} -\alpha + \beta &= a \\ \alpha + \beta &= b \end{cases}$$

c'est à dire $\alpha = \frac{b-a}{2}$ et $\beta = \frac{b+a}{2}$ et on vérifie alors que cette fonction affine réalise bien une bijection du segment $[-1,1]$ vers le segment $[a,b]$.

- b. Définissons la fonction $f = g \circ \theta$:

$$f : \begin{cases} [-1,1] & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto g(\alpha x + \beta) \end{cases}$$

Puisque $g \in \mathcal{C}^4([a,b])$, $f \in \mathcal{C}^4([-1,1])$ (composée de fonctions $\mathcal{C}^4$). Calculons

$$S(f) = \frac{1}{3} \left[g(a) + g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right]$$

et par le changement de variables $\mathcal{C}^1$ $t = \theta(x)$, $dt = \alpha dx$,

$$\int_a^b g(t) dt = \frac{b-a}{2} \int_{-1}^1 f(x) dx$$

En utilisant la question 12 pour f , on en déduit

$$\left| \frac{2}{b-a} \int_a^b g(t) dt - \frac{1}{3} \left[g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right] \right| \leq \frac{M_4(f)}{90}$$

c'est à dire

$$\left| \int_a^b g(t) dt - \frac{b-a}{6} \left[g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right] \right| \leq \frac{M_4(f)(b-a)}{180}$$

Mais on calcule $\forall t \in [-1,1]$, $f^{(4)}(t) = \alpha^4 g^{(4)}(\alpha t + \beta)$ d'où $M_4(f) = \frac{(b-a)^4}{2^4} M_4(g)$ et finalement

$$\left| \int_a^b g(t) dt - \frac{b-a}{6} \left[g(a) + 4g\left(\frac{a+b}{2}\right) + g(b) \right] \right| \leq \frac{M_4(f)(b-a)^5}{2880}$$

Q 14 Faisons une subdivision du segment $[0,1]$ en $2n$ petits intervalles. En posant $h = \frac{1}{2n}$, et $x_k = kh$, définissons

$$S_n = \frac{h}{3} \sum_{k=0}^{n-1} [f(x_{2k}) + 4f(x_{2k+1}) + f(x_{2k+2})]$$

Alors, en utilisant la majoration de la question 13 sur chaque petit intervalle $[x_{2k}, x_{2k+2}]$:

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(x) dx - S_n \right| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left[\int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x) dx - \frac{x_{2k+2} - x_{2k}}{6} [f(x_{2k+2}) + 4f\left(\frac{x_{2k} + x_{2k+2}}{2}\right) + f(x_{2k+2})] \right] \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x) dx - \frac{x_{2k+2} - x_{2k}}{6} [f(x_{2k+2}) + 4f\left(\frac{x_{2k} + x_{2k+2}}{2}\right) + f(x_{2k+2})] \right| \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2880n^5} M_4(f) \\ &= \frac{M_4(f)}{2880n^4} \end{aligned}$$