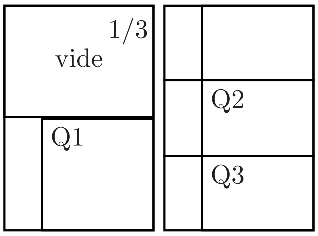
MPSI 2

DS 06

le 25 février 2004

Présentation des copies :

- Utiliser des copies doubles uniquement ;
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille et une demi-page sur la première feuille pour les remarques du correcteur. Numéroter les feuilles doubles en indiquant le nombre total de feuilles doubles (par exemple 1/3, 2/3, 3/3). Indiquer le nom sur chaque double feuille.



- Les questions doivent être traitées dans l'ordre de l'énoncé, correctement numérotées et un trait horizontal doit les séparer ; si une question n'est pas traitée, laisser un espace blanc.
- Ne pas utiliser de crayon de papier. Tirer deux traits diagonaux à l'encre pour supprimer une partie de la copie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Passer souvent à la ligne et espacer les formules.

Rédaction mathématique :

- Annoncer avant une démonstration, le résultat à prouver et respecter les plans de démonstration.
- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie ;
- Pour montrer une équivalence, l'écrire en numérotant les propositions (i) et (ii) ;
- Chaque résultat annoncé doit être *justifié* en citant précisément un théorème du cours avec ses *hypothèses exactes*, ou en *citant le numéro d'une question précédente* du problème.
- Les résultats de calcul doivent être *simplifiés* et *encadrés.*
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases en Français :
- Les notations de l'énoncé doivent être respectées ;

1 Exercice 1

On considère un $\mathbb{K}$ espace vectoriel noté E, et l'on note :

$$\mathcal{S}(E) = \{u \in L(E) \text{ tq } u^3 = u^2\}$$

$\boxed{Q\ 1}$ Soit l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (0,x,z)$$

Montrer que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ et déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$.

On considère maintenant un endomorphisme $u \in \mathcal{S}(E)$.

$\boxed{Q\ 2}$ Que peut-on dire de u si l'on suppose qu'il est inversible ?

$\boxed{Q\ 3}$ On suppose dans cette question que $\operatorname{Ker}(u) = \{0\}$. Montrer que $u = \mathrm{id}$.

$\boxed{Q\ 4}$ Soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0, -1\}$. Montrer que l'endomorphisme $v = u + \lambda\, \mathrm{id}_E$ est inversible.

$\boxed{Q\ 5}$ On suppose dans cette question que $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker} u^2$. Montrer que u est un projecteur.

Dans la suite on suppose que $\operatorname{Ker} u \neq \{0\}$ et que $\operatorname{Ker} u \neq \operatorname{Ker} u^2$.

$\boxed{Q\ 6}$ Déterminer pour $n \geq 3$, u^n. En déduire que : $E = \operatorname{Ker} u^2 \oplus \operatorname{Im} u^2$.

$\boxed{Q\ 7}$ Montrer que $\operatorname{Ker} u^2$ est stable par u et déterminer la restriction de u à $\operatorname{Im} u^2$.

$\boxed{Q\ 8}$ Soit v la restriction de u à $\operatorname{Ker} u^2$. Montrer que v est nilpotent.

2 Exercice 2

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ deux réels distincts et p,q,f trois endomorphismes de E vérifiant :

$$\begin{cases} \mathrm{id}_E & = p + q \\ f & = ap + bq \\ f^2 & = a^2 p + b^2 q \end{cases}$$

On suppose également que f n'est pas une homothétie.

$\boxed{Q\ 9}$

Calculer $(f - a\,\mathrm{id}) \circ (f - b\,\mathrm{id})$ et montrer que $E = \operatorname{Ker}(f - a\,\mathrm{id}) \oplus \operatorname{Ker}(f - b\,\mathrm{id})$.

$\boxed{Q\ 10}$ Établir que $p \circ q = q \circ p = 0$ et montrer que p et q sont des projecteurs non-nuls.

$\boxed{Q\ 11}$ Déterminer $\operatorname{Im} p$, $\operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} q$, $\operatorname{Ker} q$.

On suppose désormais que $ab \neq 0$.

$\boxed{Q\ 12}$ Montrer que f est bijective et exprimer f^{-1} en fonction de p,q,a,b.

$\boxed{Q\ 13}$ Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}$:

$$f^n = a^n p + b^n q$$

On note $F = \operatorname{Vect}(p,q)$ le sev de $L(E)$ engendré par p et q.

Q 14 Montrer que F est une sous-algèbre de $L(E)$ et que le système (p,q) est une base de F.

Q 15 Déterminer les éléments de F qui sont des projecteurs.

Q 16 Déterminer les éléments de F qui sont des symétries.

Q 17 Déterminer l'ensemble $\mathcal{U}$ des éléments u de F qui vérifient $u^2 = f$.

On considère maintenant $E = \mathbb{R}^2$ et on définit les endomorphismes

$$h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y,x+y) \end{array} \right. \qquad f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+y,x+2y) \end{array} \right.$$

Q 18

a. Montrer que pour $k \geq 1$, $h^k = 2^{k-1}h$.
b. En déduire l'expression de f^n en fonction de id_E et de h.

Q 19

a. Montrer qu'il existe deux réels distincts (à déterminer) $a < b$ tels que $(f - a\,\mathrm{id}_E) \circ (f - b\,\mathrm{id}_E) = 0_{L(E)}$.
b. Montrer qu'il existe deux projecteurs $(p,q) \in L(E)^2$ tels que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ f^n = a^n p + b_n q$$

On exprimera p et q en fonction de id_E et h.

Q 20 Déterminer un endomorphisme $u \in L(E)$ vérifiant $u^2 = f$ et $u(1,1) = (\alpha,\beta)$ avec $\alpha > 0$ et $u(1,-1) = (\gamma,\delta)$ avec $\gamma > 0$. On donnera l'expression analytique de u.

3 Exercice 3

On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ des fonctions indéfiniment dérivables. Pour $t \in \mathbb{R}$, on note $\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+t \end{array} \right.$ et on définit l'application

$$\phi_t : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & f \circ \alpha_t \end{array} \right.$$

Pour une fonction $f \in E$, on définit

$$V(f) = \mathrm{Vect}\{\phi_t(f);\ t \in \mathbb{R}\}$$

Q 21 Montrer que pour $t \in \mathbb{R}$, $\phi_t \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$, et que l'ensemble $\big(\{\phi_t;\ t \in \mathbb{R}\},\circ\big)$ est un groupe isomorphe au groupe $(\mathbb{R},+)$.

Q 22 Pour chacune des fonctions f suivantes, déterminer une base de l'espace $V(f)$ en effectuant toutes les vérifications nécessaires.

a. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array} \right.$,
b. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array} \right.$,
c. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$,
d. $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xe^x \end{array} \right.$.

Q 23 On considère dans cette question la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{x^2} \end{array} \right.$$

a. Montrer que $\forall n \geq 1$, pour tous réels $t_1 < \cdots < t_n$, la famille $(x \mapsto e^{(x+t_k)^2})_{1 \leq k \leq n}$ est libre dans $V(f)$.
b. En déduire qu'il n'existe pas de base de $V(f)$.

Corrigé.

$\boxed{Q\ 1}$ On calcule :

$$f^2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (0,0,z) \end{array} \right.$$

et f^3 est défini de la même façon. On calcule

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z = 0\} \\ &= \{(0,y,0);\ y \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{Vect}(0,1,0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f = \{(0,x,z);\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{x.(0,1,0) + z.(0,0,1);\ (x,z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \operatorname{Vect}\big((0,1,0),(0,0,1)\big) \end{aligned}$$

$\boxed{Q\ 2}$ Si $u \in \mathrm{GL}(E)$, notons u^{-1} son inverse. Comme $u^2 \circ (u - \mathrm{id}) = 0$, en composant deux fois à gauche par u^{-1}, on trouve que $u - \mathrm{id} = 0$.

$\boxed{Q\ 3}$ Soit $x \in E$. Comme $(u^3 - u^2)(x) = 0$, $u(u^2(x) - u(x)) = 0$ et donc le vecteur $u^2(x) - u(x)$ est dans $\operatorname{Ker} u$ et il est nul. Comme $u(u(x) - x) = 0$, $u(x) - x \in \operatorname{Ker} u$ et donc $u(x) = x$. Comme x est arbitraire, on a bien $u = \mathrm{id}$.

$\boxed{Q\ 4}$ On a $u = \dfrac{1}{\lambda}(v - \mathrm{id})$ et puisque $u^3 = u^2$, on en tire une relation polynômiale satisfaite par v : $(v - \mathrm{id})^3 = \lambda(v - \mathrm{id})^2$ et en utilisant la formule du binôme (v et id commutent), on trouve que

$$v^3 + (\lambda - 3)v^2 + (3 + 2\lambda)v - (1 + \lambda)\,\mathrm{id} = 0_{L(E)}$$

On en déduit (voir l'exercice du cours) que v est inversible et que

$$v^{-1} = \frac{1}{1 + \lambda}(v^2 + (\lambda - 3)v^2 + (3 + 2\lambda)\,\mathrm{id})$$

$\boxed{Q\ 5}$ Soit $x \in E$. Comme $u^3(x) = u^2(x)$, $u^2(u(x) - x) = 0$ et donc $u(x) - x \in \operatorname{Ker} u^2$. Mais comme $\operatorname{Ker} u^2 = \operatorname{Ker} u$, $u(x) - x \in \operatorname{Ker} u$ et donc $u(u(x) - x) = 0$: $u^2(x) = u(x)$. Comme x est arbitraire, $u^2 = u$ et donc u est un projecteur.

$\boxed{Q\ 6}$ Comme $u^3 = u^2$, par récurrence on montre que $\forall n \geq 3$, $u^n = u^2$. Alors puisque $u^4 = u^2$, on en déduit que u^2 est un projecteur et d'après le cours que $E = \operatorname{Ker} u^2 \oplus \operatorname{Im} u^2$.

$\boxed{Q\ 7}$ Soit $x \in \operatorname{Ker} u^2$. Montrons que $u(x) \in \operatorname{Ker} u^2$. Pour cela calculons $u^2(u(x)) = u^3(x) = u^2(x) = 0$. Par conséquent, $u(x) \in \operatorname{Ker} u^2$. Soit $x \in \operatorname{Im} u^2$. Il existe $x' \in E$ tel que $x = u^2(x')$. Alors $u(x) = u^3(x') = u^2(x') = x$ (car $u^3 = u^2$). Donc la restriction de u à $\operatorname{Im} u^2$ est l'identité de $\operatorname{Im} u^2$.

$\boxed{Q\ 8}$ Soit $x \in \operatorname{Ker} u^2$. Calculons $v^2(x) = u^2(x) = 0$. Par conséquent, $v^2 = 0$ et donc v est nilpotent.

$\boxed{Q\ 9}$

$$(f - a\,\mathrm{id}) \circ (f - b\,\mathrm{id}) = f^2 - (a + b)f + ab\,\mathrm{id} = (a^2 - a(a + b) + ab)p + (b^2 - b(a + b) + ab)q = 0_{L(E)}$$

Pour la décomposition, voir l'exercice fait en cours.

$\boxed{Q\ 10}$ En calculant $(ii) - b(i)$, on trouve puisque $a \neq b$:

$$p = \frac{1}{a - b}(f - b\,\mathrm{id})$$

De même, $(ii) - a(i)$ donne

$$q = \frac{1}{b - a}(f - a\,\mathrm{id})$$

Alors

$$q \circ p = -\frac{1}{(a - b)^2}(f - a\,\mathrm{id}) \circ (f - b\,\mathrm{id}) = 0$$

Et comme $(f - a\,\mathrm{id})$ commute avec $(f - b\,\mathrm{id})$, on obtient également $p \circ q = 0$. En reprenant l'expression de p en fonction de f, on calcule

$$p^2 = \frac{1}{(a - b)^2}(f - b\,\mathrm{id})^2 = \frac{1}{(a - b)^2}(f^2 - 2bf + b^2\,\mathrm{id}) = \frac{1}{(a - b)^2}((a^2 - 2ab + b^2)p + (b^2 - 2b^2 + b^2)q) = p$$

De même

$$q^2 = \frac{1}{(a-b)^2}(f - a\,\mathrm{id})^2 = \frac{1}{(a-b)^2}(f^2 - 2af + a^2\,\mathrm{id}) = \frac{1}{(a-b)^2}((a^2 - 2a^2 + a^2)p + (b^2 - 2ab + a^2)q) = q$$

Par conséquent, p et q sont des projecteurs. Si l'on avait $p = O_{L(E)}$, on aurait $q = \mathrm{id}_E$ et $f = bq$ et alors f serait une homothétie ce qui est exclus par l'énoncé. De même, $q \neq O_{L(E)}$.

$\boxed{Q\ 11}$ Puisque $p = \frac{1}{a-b}(f - b\,\mathrm{id}_E)$, il vient que $\mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_E)$ et de même, $\mathrm{Ker}\, q = \mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id}_E)$. On a alors $\mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E - p) = \mathrm{Ker}\, q = \mathrm{Ker}(f - a\,\mathrm{id})$ et $\mathrm{Im}\, q = \mathrm{Ker}\, p = \mathrm{Ker}(f - b\,\mathrm{id}_E)$.

$\boxed{Q\ 12}$ a) D'après la question 9,

$$f^2 - (a+b)f + ab\,\mathrm{id} = 0 \Rightarrow f \circ g = \mathrm{id}$$

où l'on a posé

$$g = -\frac{1}{ab}(f - (a+b)\,\mathrm{id})$$

Comme g est un polynôme en f qui commute avec f, on a aussi $g \circ f = \mathrm{id}$ et donc $f \in \mathrm{GL}(E)$ avec

$$f^{-1} = -\frac{1}{ab}(f - (a+b)\,\mathrm{id}) = \frac{1}{a}p + \frac{1}{b}q$$

(d'après (ii)).

$\boxed{Q\ 13}$ Commençons par montrer le résultat pour $n \geq 0$ par récurrence sur n :

$$\mathcal{P}(n) : f^n = a^n p + b^n q$$

$\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vrais par hypothèse.
$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$:

$$f^{n+1} = f \circ f^n = (ap + bq) \circ (a^n p + b^n q) = a^{n+1}p + ab^n p \circ q + ba^n q \circ p + b^{n+1}q = a^{n+1}p + b^{n+1}q$$

car $p \circ q = q \circ p = 0$.
Montrons ensuite le résultat pour $n < 0$ par récurrence:

$$\mathcal{P}(n) : f^{-n} = a^{-n}p + b^{-n}q$$

$\mathcal{P}(1)$ est vraie d'après l'expression de f^{-1} trouvée à la question 12
$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$:

$$f^{-(n+1)} = f^{-1} \circ f^{-n} = (a^{-1}p + b^{-1}q) \circ (a^{-n}p + b^{-n}q) = a^{-(n+1)}p + b^{-(n+1)}q$$

car $p \circ q = q \circ p = 0$.

$\boxed{Q\ 14}$ On sait que F est un sev de $L(E)$ puisque $F = \mathrm{Vect}(p,q)$. Montrons que F est stable pour $\circ$: Soit $(u,v) \in F^2$. Montrons que $u \circ v \in F$. Comme $u \in F$, $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$u = xp + yq$$

De même, $\exists (x',y') \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$v = x'p + y'q$$

Alors

$$u \circ v = xx'p + yy'q \in F$$

(car $p \circ q = q \circ p = 0$).
$\mathrm{id} \in F$ car d'après (i), $\mathrm{id} = 1.p + 1.q \in F$.
Par conséquent, F est une sous-algèbre de $L(E)$. Par définition, le système (p,q) est générateur de F. Montrons qu'il est libre. Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda p + \mu q = 0_{L(E)}$. En composant par p à gauche, on obtient $\lambda p^2 + \mu p \circ q = 0_{L(E)}$, c'est à dire $\lambda p = 0_{L(E)}$. Mais puisque $p \neq 0_{L(E)}$, il vient que $\lambda = 0$. On montre de même que $\mu = 0$.

$\boxed{Q\ 15}$ Soit $u \in F$: $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$u = xp + yq$$

Alors

$$u^2 = x^2 p + y^2 q$$

u est un projecteur ssi $u^2 = u$, c'est à dire

$$(x^2 - x)p + (y^2 - y)q = 0$$

Soit $u \in F$. Il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $u = xp + yq$. Alors si u est un projecteur, on doit avoir $u^2 = u$, c'est à dire

$$x^2p + y^2q = xp + yq$$

et donc

$$x(x-1)p + y(y-1)q = 0_{L(E)}$$

Mais puisque le système (p,q) est libre, on a

$$x(x-1) = 0 \text{ et } y(y-1) = 0$$

et alors u est de la forme : $0_{L(E)}$, p, q, $p+q$. Réciproquement, ces endomorphismes de F sont bien des projecteurs.

$\boxed{Q\ 16}$ De la même façon qu'à la question précédente, un endomorphisme $u = xp + yq \in F$ est une symétrie si et seulement si $u^2 = \mathrm{id}_E$ ce qui donne

$$(x^2 - 1)p + (y^2 - 1)q = 0_{L(E)}$$

et puisque (p,q) est libre dans F, on doit avoir $x^2 = 1$ et $y^2 = 1$ et donc $u \in \{p+q, p-q, -p+q, -p-q\}$. On vérifie réciproquement que ces quatre endomorphismes de F sont bien des symétries.

$\boxed{Q\ 17}$ Soit $u = xp + yq \in F$. On calcule $u^2 - f$:

$$u^2 - f = (x^2 - a)p + (y^2 - b)q$$

Puisque (p,q) est libre, $u^2 = f$ si et seulement si $x^2 = a$ et $y^2 = b$. On étudie donc plusieurs cas :

- Si $a < 0$ ou $b < 0$, $\mathcal{U} = \emptyset$;
- Si $a = 0$ et $b = 0$, $\mathcal{U} = \{0_{L(E)}\}$;
- Si $a = 0$ et $b > 0$, $\mathcal{U} = \{\sqrt{b}q, -\sqrt{b}q\}$;
- Si $a > 0$ et $b = 0$, $\mathcal{U} = \{\sqrt{a}p, -\sqrt{a}q\}$;
- Si $a > 0$ et $b > 0$, $\mathcal{U} = \{\sqrt{a}p + \sqrt{b}q, -\sqrt{a}p + \sqrt{b}q, \sqrt{a}p - \sqrt{b}q, -\sqrt{a}p - \sqrt{b}q\}$.

$\boxed{Q\ 18}$

a. Par une récurrence simple.

b. On a $f = \mathrm{id}_E + h$ et en appliquant la formule du binôme (f et h commutent), pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} f^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k \\ &= \mathrm{id}_E + \Big[\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^{k-1}\Big].h \\ &= \mathrm{id}_E + \frac{3^n - 1}{2}.h \end{aligned}$$

$\boxed{Q\ 19}$

a. D'après la question précédente, $f^2 = \mathrm{id} + 4h = \mathrm{id} + 4(f - \mathrm{id})$ d'où l'on tire $f^2 - 4f + 3\,\mathrm{id} = 0_{L(E)}$ et donc $(f - \mathrm{id}) \circ (f - 3\,\mathrm{id}) = 0_{L(E)}$. On pose donc $a = 1$ et $b = 3$.

b. En s'inspirant des premières questions de l'exercice, posons

$$\begin{cases} p &= \dfrac{1}{a-b}(f - b\,\mathrm{id}_E) = \mathrm{id}_E - h \\ q &= \dfrac{1}{b-a}(f - a\,\mathrm{id}_E) = \dfrac{1}{2}h \end{cases}$$

On a bien pour $n \in \mathbb{N}$, $f^n = a^np + b^nq$ et d'après la question 10, p et q sont deux projecteurs vérifiant $p \circ q = q \circ p = 0_{L(E)}$.

$\boxed{Q\ 20}$ D'après la question 16, $u = \varepsilon_1 p + \varepsilon_2\sqrt{3}q$ avec $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{-1, +1\}$. On en déduit que

$$u = \varepsilon_1\,\mathrm{id}_E + \frac{\sqrt{3}\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{2}h$$

Puisque $u(1,-1) = (\varepsilon_1,-\varepsilon_1)$, il faut que $\varepsilon_1 = +1$ et puisque $u(1,1) = (\sqrt{3}\varepsilon_2,...)$, il faut que $\varepsilon_2 = +1$. Finalement,

$$u : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (\frac{\sqrt{3}+1}{2}x + \frac{\sqrt{3}-1}{2}y, \frac{\sqrt{3}-1}{2}x + \frac{\sqrt{3}+1}{2}y) \end{array} \right.$$

$\boxed{Q\ 21}$ On vérifie facilement que ϕ_t est linéaire, et bijective avec $\phi_t^{-1} = \phi_{-t}$ et que l'application $\psi : \left\{ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R},+) & \longrightarrow & (\mathrm{GL}(\mathbb{E}),\circ) \\ t & \mapsto & \phi_t \end{array} \right.$ est un isomorphisme de groupes.

$\boxed{Q\ 22}$

a. Montrons que $V(f) = \mathrm{Vect}(exp)$. Soit $g \in V(f)$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f(x+t) = e^{x+t} = e^t e^x$. Par conséquent, $g \in \mathrm{Vect}(f)$ et donc (f) est un système générateur de $V(f)$. Comme $f \neq 0_E$, ce système est libre et c'est donc une base de $V(f)$.

b. Montrons que $(\sin,\cos)$ est une base de $V(f)$. Soit $g \in V(f)$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \sin(x+t) = \cos t.\sin x + \sin t \cos x$ et donc $g \in \mathrm{Vect}(\sin,\cos)$. Nous avons donc montré que le système est générateur. On montre facilement qu'il est libre.

c. Montrons que $(x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2)$ est une base de $V(f)$. Soit $g \in V(f)$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = (x+t)^2 = x^2 + 2t.x + t^2.1$$

et donc $g \in \mathrm{Vect}(x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2)$. On montre facilement que ce système est libre.

1. Posons $\alpha : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & xe^x \end{array} \right.$ et $\beta : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x \end{array} \right.$ et montrons que (α,β) est une base de $V(f)$. Soit $g \in V(f)$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = (x+t)e^{x+t} = e^t xe^x + te^t e^x$$

Par conséquent,

$$g = e^t.\alpha + te^t.\beta \in \mathrm{Vect}(\alpha,\beta)$$

Le système est donc générateur. Montrons qu'il est libre. Soit $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\lambda.\alpha + \mu.\beta = 0_E$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lambda xe^x + \mu e^x = 0$$

Pour $x = 0$, on trouve que $\mu = 0$ et ensuite en prenant $x = 1$, on tire que $\lambda = 0$. Le système (α,β) est donc une base de $V(f)$.

$\boxed{Q\ 23}$

a. Soit $n \geq 1$ et $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in R^n$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e^{(x+t_k)^2} = 0$$

Montrons par l'absurde que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$. S'il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $\lambda_i \neq 0$, posons $p = \max\{i \in [\![1,n]\!] \mid \lambda_i \neq 0\}$. Alors en divisant par $e^{(x+t_n)^2}$, on trouve que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1 e^{(t_1-t_p)x+(t_1^2-t_p^2)} + \dots + \lambda_{p-1}e^{(t_{p-1}-t_p)x+(p-1)^2-p^2} + \lambda_p = 0$$

mais en passant à la limite lorsque $x \to +\infty$, $(t_i - t_p < 0)$, on trouve que $\lambda_p = 0$, une absurdité. La famille est donc libre.

b. Par l'absurde, s'il existait un système générateur de $V(f)$, formé d'un nombre fini de vecteurs $S = (f_1,\dots,f_p)$, puisque chacun de ces vecteurs f_i est dans $V(f)$, il s'exprime comme une combinaison linéaire finie de fonctions $\alpha_i : x \mapsto e^{(x+t_i)^2}$. Considérons tous les t_i intervenant dans les décompositions des fonctions $(f_1,\dots,f_p)$, $t_1 < \dots < t_n$ et notons $T = 1 + \max\{t_i, i \in [\![1,n]\!]\}$. Puisque la fonction $\alpha_T : x \mapsto e^{(x+T)^2}$ appartient à $V(f)$, elle devrait s'exprimer comme une combinaison linéaire des α_i : $\exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$\alpha_T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i$$

mais alors

$$\alpha_T - \lambda_1\alpha_1 - \dots - \lambda_n\alpha_n = 0$$

et puisque le système $(\alpha_1,\dots,\alpha_n,\alpha_T)$ est libre d'après a), on devrait avoir $(1,-\lambda_1,\dots,-\lambda_n) = (0,\dots,0)$ ce qui est absurde.