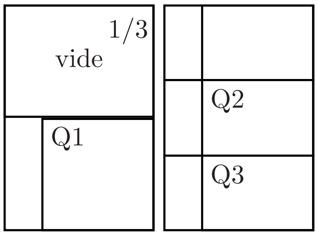
MPSI 1-2-3

DS 05

le 21 janvier 2004

Présentation des copies :

- Utiliser des copies doubles uniquement ;
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille et une demi-page sur la première feuille pour les remarques du correcteur. Numéroter les feuilles doubles en indiquant le nombre total de feuilles doubles (par exemple 1/3, 2/3, 3/3). Indiquer le nom sur chaque double feuille.



- Les questions doivent être traitées dans l'ordre de l'énoncé, correctement numérotées et un trait horizontal doit les séparer ; si une question n'est pas traitée, laisser un espace blanc.
- Ne pas utiliser de crayon de papier. Tirer deux traits diagonaux à l'encre pour supprimer une partie de la copie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Passer souvent à la ligne et espacer les formules.

Rédaction mathématique :

- Annoncer avant une démonstration, le résultat à prouver et respecter les plans de démonstration.
- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie ;
- Pour montrer une équivalence, l'écrire en numérotant les propositions (i) et (ii) ;
- Chaque résultat annoncé doit être *justifié* en citant précisément un théorème du cours avec ses *hypothèses exactes*, ou en *citant le numéro d'une question précédente* du problème.
- Les résultats de calcul doivent être *simplifiés* et *encadrés.*
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases en Français :
- Les notations de l'énoncé doivent être respectées ;

On définit l'intervalle $I = [0, +\infty[$ et on note $\mathcal{N}$ l'ensemble des fonctions $f : I \mapsto \mathbb{R}$ vérifiant :

1. $f(0) = 0$,
2. $\forall x \in I,\ f(x) \geq 0$,
3. f est deux fois dérivable sur I,
4. $\forall x \in I,\ f''(x) \geq 0$.

1 Comportement à l'infini des fonctions de $\mathcal{N}$

Pour une fonction $f \in \mathcal{N}$, on définit la fonction

$$g : \left\{ \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)}{x} \end{array} \right.$$

$\boxed{Q\ 1}$ On considère dans cette question la fonction f définie sur I par $f(x) = x - \operatorname{th} x$.

a. Vérifier que $f \in \mathcal{N}$.
b. Déterminer la limite lorsque $x \to +\infty$ de f' et de g.
c. Étudier l'existence d'une droite asymptote à la courbe représentative de f. On précisera la position de la courbe par rapport à l'asymptote éventuelle.

$\boxed{Q\ 2}$ On considère dans cette question la fonction f définie sur I par $f(x) = x \arctan(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1 + x^2)$.

a. Vérifier que $f \in \mathcal{N}$.
b. Calculer les limites de f' et de g en 0 et en $+\infty$.
c. Étudier l'existence d'une droite asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

$\boxed{Q\ 3}$ Donner un exemple de fonction $f \in \mathcal{N}$ telle que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

On considère désormais une fonction $f \in \mathcal{N}$ quelconque.

$\boxed{Q\ 4}$

a. Montrer que $\forall x \in I$,
$$f(x) \leq x f'(x) \tag{1}$$
b. En déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

$\boxed{Q\ 5}$ Montrer que $\forall (x,y) \in I^2,\ f(x) + f(y) \leq f(x + y)$.

$\boxed{Q\ 6}$ On suppose dans cette question que $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$. Montrer que $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

$\boxed{Q\ 7}$ On suppose dans cette question que $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

a. Soit $x > 0$. Montrer que
$$\frac{x}{2} f'(x/2) \leq f(x) - f(x/2) \leq f(x) \tag{2}$$
b. En déduire que $g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$.

$\boxed{Q\ 8}$ On suppose dans cette question que f n'est pas constante et que g ne tend pas vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$.

a. Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\sim} ax$.
b. Montrer qu'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} l$.
c. En utilisant la question 7a, montrer que $l = a$.
d. Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tel que $f(x) - ax \xrightarrow[x \to +\infty]{} b$.
e. Dans le cas où $b \in \mathbb{R}$, montrer que la courbe représentative de f possède une droite asymptote au voisinage de $+\infty$ et préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote.

2 L'ensemble $M(f)$

Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$. On définit pour m réel positif , la fonction

$$h_m : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & mx - f(x) \end{array} \right.$$

et on note

$$M(f) = \{m \in \mathbb{R}^+ \mid h_m \text{ est majorée sur } I\}$$

$\boxed{Q\ 9}$ On désigne par f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

a. Montrer que si $m \in M(f)$ alors $[0,m] \subset M(f)$.

b. En déduire que $M(f)$ est un intervalle.

Désormais, lorsque $m \in M(f)$, on note

$$f^\star(m) = \sup_{x \in I} h_m(x) = \sup_{x \in I} \big[mx - f(x)\big]$$

La fonction $f^\star$ définie sur $M(f)$ s'appelle la *fonction conjuguée* de f.

$\boxed{Q\ 10}$ c désigne un réel et α un réel strictement supérieur à 1. Pour les fonctions f définies de I dans $\mathbb{R}$ qui suivent, préciser $M(f)$ et déterminer pour les réels x de $M(f)$, $f^\star(x)$ en fonction de x.

a. $\forall x \in [0, +\infty[\qquad f(x) = c$

b. $\forall x \in [0, +\infty[\qquad f(x) = \dfrac{x^2}{2}$

c. $\forall x \in [0, +\infty[\qquad f(x) = x^\alpha$

$\boxed{Q\ 11}$ On considère $f : I \mapsto \mathbb{R}$ telle que $M(f)$ soit non vide. Montrer que

$$\forall x \in I \quad \forall m \in M(f) \qquad f(x) + f^\star(m) \geq mx \tag{3}$$

$\boxed{Q\ 12}$ On considère deux fonctions f, $g : I \mapsto \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in I$, $f(x) \leq g(x)$. Montrer que $M(f) \subset M(g)$ et que $\forall m \in M(f)$, $g^\star(m) \leq f^\star(m)$.

3 Conjuguée d'une fonction de $\mathcal{N}$.

Les fonctions considérées dans cette partie sont toutes des fonctions de $\mathcal{N}$.

$\boxed{Q\ 13}$ On suppose que f est une fonction non nulle de $\mathcal{N}$.

a. Montrer qu'il existe x_0 élément de I tel que :

$$\frac{f(x_0)}{x_0} \in M(f)$$

b. En déduire que $M(f)$ est un intervalle non réduit à $\{0\}$.

$\boxed{Q\ 14}$ On se propose de chercher des fonctions vérifiant $M(f) = [0,+\infty[$ et $f = f^\star$. Pour cela, on considère la fonction $k : I \mapsto \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in I$, $k(x) = \dfrac{x^2}{2}$ et l'on désigne par f une fonction $I \mapsto \mathbb{R}$ telle que $I = M(f)$ et $\forall x \in I$, $f^\star(x) = f(x)$.

a. Montrer que $\forall x \in I$, $f(x) \geq k(x)$.

b. Montrer que $\forall x \in I$, $f(x) = k(x)$.

c. Conclure.

$\boxed{Q\ 15}$ Dans cette question, on considère la fonction définie sur I par $f(x) = e^x - 1$.

a. Déterminer l'ensemble $M(f)$ et calculer pour $m \in M(f)$, $f^\star(m)$.

b. Déterminer $M(f^\star)$ et la fonction $(f^\star)^\star$.

$\boxed{Q\ 16}$ On considère dans cette question une fonction f de $\mathcal{N}$ vérifiant $I = M(f)$.

a. En utilisant l'inégalité (3) établie à la question 11, montrer que $M(f^\star) = I$ et

$$\forall x \in I \qquad (f^\star)^\star(x) \leq f(x)$$

b. Soit $x_0 \in I$, montrer que :

$$\forall x \in I \qquad f(x) \geq f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$$

c. En déduire que :

$$\forall x \in I \qquad (f^\star)^\star(x) \geq f(x)$$

d. Conclure

$\boxed{Q\ 17}$ Dans cette question, f désigne une fonction de $\mathcal{N}$ vérifiant $f'(0) = 0$ telle qu'il existe un réel strictement positif c vérifiant :

$$\forall x \in [0, +\infty[\qquad f''(x) \geq c$$

a. Montrer que

$$\forall x \in]0, +\infty[\qquad f'(x) \geq cx$$

et en déduire que f' réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, +\infty[$.

b. Montrer que $M(f) = [0, +\infty[$ et que :

$$\forall x \in [0, +\infty[\qquad f^\star(f'(x)) = xf'(x) - f(x)$$

c. Montrer que $f^\star$ est dérivable et donner un lien entre $(f^\star)'$ et f'.

$\boxed{Q\ 18}$ En utilisant les résultats de la première partie, déterminer l'ensemble $M(f)$ lorsque f est un élément de $\mathcal{N}$.

Corrigé.

$\boxed{Q\ 1}$

a. f est deux fois dérivable sur I et on calcule pour $x \in I$, $f'(x) = \operatorname{th}^2 x$, $f''(x) = 2\operatorname{th} x(1-\operatorname{th}^2 x) \geq 0$. La fonction f est croissante sur I et puisque $f(0)=0$, $\forall x \in I$, $f(x) \geq 0$. On a bien $f \in \mathcal{N}$.

b. $f'(x) = \operatorname{th}^2 x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$, $g(x) = 1 - \dfrac{\operatorname{th} x}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

c. Puisque $f(x) - x = -\operatorname{th} x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -1^+$, la droite d'équation $y = x-1$ est asymptote à la courbe représentative de f et la courbe est située au dessus de l'asymptote.

$\boxed{Q\ 2}$

a. La fonction f est deux fois dérivable sur I comme composée et somme de fonctions deux fois dérivables. On calcule pour $x \in I$,

$$f'(x) = \arctan x \geq 0$$

Donc f est croissante et puisque $f(0)=0$, $\forall x \in I$, $f(x) \geq 0$. On calcule ensuite

$$f''(x) = \frac{1}{x^2+1} \geq 0$$

La fonction f est bien dans $\mathcal{N}$.

b. $f'(0) = 0$ et $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pi/2$. On a $g(x) = \arctan x - \dfrac{1}{2x}\ln(1+x^2)$. En utilisant les équivalents classiques, puisque $\ln(1+x^2) \underset{x\to 0}{\sim} x^2$, il vient que $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Pour trouver la limite en $+\infty$, faisons le changement de variables $h = 1/x$ et cherchons la limite en 0^+ de

$$\theta(h) = f(1/h) = \arctan(1/h) - h\ln h + \frac{h}{2}\ln(1+h^2) \xrightarrow[h\to 0^+]{} \pi/2$$

Donc $\boxed{f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}}$.

c. On a déjà vu que $f(x)/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$. Formons donc $\phi(x) = f(x) - \dfrac{\pi}{2}x = x\big(\arctan x - \dfrac{\pi}{2}\big) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$. Puisque lorsque $x > 0$,

$$\arctan x + \arctan(1/x) = \pi/2$$

et que $1/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $\arctan(1/x) \underset{x\to+\infty}{\sim} 1/x$. Par conséquent, $x\big(\arctan x - \pi/2\big) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -1$ et donc $f(x) - \dfrac{\pi}{2}x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$. Il n'y a donc pas de droite asymptote.

$\boxed{Q\ 3}$ Par exemple $f(x) = x^2$.

$\boxed{Q\ 4}$

a. Considérons la fonction définie sur I par $\theta(x) = xf'(x) - f(x)$. Elle est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $\theta'(x) = xf''(x) \geq 0$.

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$\theta'(x)$	$+$
$\theta(x)$	0 $\nearrow$

Par conséquent, θ est croissante sur I et comme $\theta(0) = 0$, $\forall x \in I$, $\theta(x) \geq 0$. On a bien $f(x) \leq xf'(x)$.

b. La fonction g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x > 0$, on calcule $g'(x) = \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2} \geq 0$ d'après a. La fonction g est donc croissante sur $]0,+\infty[$.

$\boxed{Q\ 5}$ Soient $(x,y) \in I^2$. Puisque g est croissante et que $x \leq x+y$, on a $\dfrac{f(x)}{x} \leq \dfrac{f(x+y)}{x+y}$. De même, puisque $y \leq x+y$, $\dfrac{f(y)}{y} \leq \dfrac{f(x+y)}{x+y}$. Alors

$$f(x) + f(y) \leq x\frac{f(x+y)}{x+y} + y\frac{f(x+y)}{x+y} = f(x+y)$$

$\boxed{Q\ 6}$ D'après la question 4, $\forall x \in I$, $g(x) = \dfrac{f(x)}{x} \leq f'(x)$. Comme $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, d'après le théorème des gendarmes, $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

$\boxed{Q\ 7}$

a. Soit $x > 0$. En appliquant le théorème des accroissements finis entre $x/2$ et x (la fonction f est continue sur $[x/2,x]$ et dérivable sur $]x/2,x[$), il existe $c \in]x/2,x[$ tel que $f(x) - f(x/2) = x/2f'(c)$. Mais comme $f'' \geq 0$, f' est croissante sur I et donc $f'(c) \geq f'(x/2)$. Par conséquent, $f(x) - f(x/2) \geq x/2f'(x/2)$. Comme $f(x/2) \geq 0$, on a également $f(x) - f(x/2) \leq f(x)$.

b. Puisque $\forall x > 0$, $\dfrac{1}{2}f'(x/2) \leq g(x)$ et que $f'(x/2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, d'après le théorème des gendarmes, $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

$\boxed{Q\ 8}$

a. Nous avons vu à la question 4 que la fonction g est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, g possède une limite finie ou $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$. Comme on suppose ici que g ne tend pas vers $+\infty$, g possède une limite finie $a \in \mathbb{R}$. On a supposé que f n'était pas constante sur I. Par conséquent, il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) > 0$. Alors pour $x \geq x_0$, $0 < g(x_0) \leq g(x)$ et par passage à la limite dans les inégalités, $0 < g(x_0) \leq a$. Par conséquent, $f(x)/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} a$ avec $a > 0$, ce qui montre que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} ax$.

b. La fonction f' est croissante puisque $f'' \geq 0$. D'après le théorème de la limite monotone, f possède une limite finie ou $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$. Si on avait $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, d'après la question 7, on aurait également $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ ce qui est faux. Par conséquent, il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l$.

c. D'après la question 4a, $\forall x > 0$, $g(x) \leq f'(x)$. Par passage à la limite dans les inégalités on en tire que $a \leq l$. D'après la question 7a, $\forall x > 0$,

$$f'(x/2) \leq 2g(x) - g(x/2)$$

Mais puisque $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} a$ et $g(x/2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} a$, $2g(x) - g(x/2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} a$ et par passage à la limite dans les inégalités, on a également $l \leq a$. Donc $l = a$.

d. Considérons la fonction définie sur I par

$$\phi(x) = f(x) - ax$$

Elle est deux fois dérivable sur I et on calcule pour $x \in I$, $\phi'(x) = f'(x) - a$, $\phi''(x) = f''(x) \geq 0$. Par conséquent, ϕ' est croissante et comme $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} a$, $\forall x \geq 0$, $f'(x) \leq a$ et donc $\phi'(x) \leq 0$.

x	$0 \qquad +\infty$
$\phi''(x)$	$+$
$\phi'(x)$	$\nearrow \; 0$
$\phi(x)$	$\searrow \; b$

La fonction ϕ est donc décroissante sur I. D'après le théorème de la limite monotone, il existe $b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tel que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} b$.

e. Considérons la fonction définie sur I par $\theta(x) = f(x) - ax - b$. Puisque $\theta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$. De plus, la fonction θ est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $\theta'(x) = f'(x) - a \leq 0$. Par conséquent, θ est décroissante sur I. Comme $\theta(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $\forall x \in I$, $\theta(x) \geq 0$ ce qui montre que la courbe de f est située au dessus de son asymptote.

x	$0 \qquad +\infty$
$\theta'(x)$	$-$
$\theta(x)$	$\searrow \; 0$

Q 9

a. Soit m un élément de $M(f)$ et m' un réel positif vérifiant $m' \leq m$, on remarque que :

$$\forall x \in I \qquad h_{m'}(x) \leq h_m(x)$$

Comme l'ensemble $\{h_m(x), x \in I\}$ est majoré, c'est aussi le cas de l'ensemble $\{h_{m'}(x), x \in I\}$. Ceci permet de montrer que $[0,m] \subset M(f)$.

b. Le cas $M(f) = \emptyset$ est direct. Si $M(f)$ n'est pas vide et si m et m' sont deux éléments de $M(f)$ vérifiant $m \leq m'$, l'ensemble $[m,m']$ contenu dans $[0,m']$ est aussi contenu dans $M(f)$, donc $M(f)$ est une partie convexe de $\mathbb{R}$, ce qui montre que $M(f)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Q 10

b. Soit $m \in I$. La fonction h_m définie par $h_m(x) = mx - x^2/2$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $h'_m(x) = m - x$. Par conséquent, la fonction h_m possède un maximum atteint en $x = m$ et $f^\star(m) = h_m(m) = \dfrac{m^2}{2} = f(m)$.

c. Soit $m \in [0,+\infty[$. La fonction h_m est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h_m(x) = mx - x^\alpha$, $h'_m(x) = m - \alpha x^{\alpha-1}$.

– Si $m > 0$, h'_m s'annule en $x_0 = (m/\alpha)^{1/(\alpha-1)}$ et $h_m(x_0) = (\alpha-1)(m/\alpha)^{\alpha/(\alpha-1)}$:

x	0		$\left(\frac{m}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$		$+\infty$
$h'_m(x)$		$+$	0	$-$	
$h_m(x)$	0	$\nearrow$	$(\alpha-1)\left(\frac{m}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}$	$\searrow$	$-\infty$

– Si $m = 0$, la fonction h_m est décroissante et atteint son maximum en 0.

x	0		$+\infty$
$h'_m(x)$		$-$	
$h_m(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$

Par conséquent, $M(f) = [0,+\infty[$ et

$$f^\star : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ m & \longmapsto \quad \begin{cases} 0 & \text{si } m \leq 0 \\ (\alpha-1)\left(\frac{m}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} & \text{si } m > 0 \end{cases} \end{cases}$$

Q 11 Soit $x \in I$ et $m \in M(f)$. Puisque la borne sup. est un majorant, $mx - f(x) \leq f^\star(m)$ d'où $f(x) + f^\star(m) \geq mx$.

Q 12 Soit $m \in M(f)$ et $x \in I$. Puisque

$$mx - g(x) \leq mx - f(x) \leq f^\star(m)$$

il vient que l'ensemble $\{mx - g(x);\ x \in I\}$ est majoré par $f^\star(m)$ donc que $m \in M(g)$ et en passant à la borne supérieure, on a $g^\star(m) \leq f^\star(m)$.

Q 13

a. La fonction f n'étant pas la fonction nulle, il existe un élément x_0 de I tel que $f(x_0) \neq 0$. Comme $f(0) = 0$ et que la fonction f est croissante, il vient immédiatement $f(x_0) > 0$ Intéressons nous à la fonction g définie sur I, donnée par $g(x) = \frac{f(x_0)}{x_0}x - f(x)$. Cette fonction est dérivable sur I (somme de deux fonctions $g'(x) = \frac{f(x_0)}{x_0} - f'(x)$. Or, en utilisant la formule des accroissements finis entre 0 et x_0, nous savons qu'il existe un réel c de $]0,x_0[$ tel que $f'(c) = \frac{f(x_0)}{x_0}$. Ce point est extrêmement intéressant car comme f' est croissante cela signifie que

$$\forall x \in [c,+\infty[\qquad g'(x) \leq 0 \qquad et \quad \forall x \in [0,a] \qquad g'(x) \geq 0$$

Ceci permet d'affirmer que :

$$\forall x \in [0,+\infty[\qquad g(x) \leq g(c)$$

Ce qui montre que $\frac{f(x_0)}{x_0}$ est un élément de $M(f)$.

b. Nous savions déjà que $M(f)$ était un intervalle de $\mathbb{R}$, nous venons de montrer que $M(f)$ contenait un réel strictement positif On a donc affaire à un intervalle non réduit à $\{0\}$.

Q 14

a. Soit $x \in I$. Puisque $x \in M(f)$, en prenant $m = x$ dans la question 11,

$$f(x) + f^\star(x) \geq x^2$$

c'est à dire $2f(x) \geq x^2$ et on en déduit l'inégalité demandée.

b. Puisque $\forall x \in I$, $k(x) \leq f(x)$, d'après la question 12, on en déduit que $I \subset M(k) \subset M(f)$ et $\forall x \in I$, $f^\star(x) \leq k^\star(x)$. Puisque $f^\star(x) = f(x)$ et $k^\star(x) = k(x)$, on a $f(x) \leq k(x)$. On a montré l'autre inégalité en a et donc $\forall x \in I$, $k(x) = f(x)$.

c. Une seule fonction répond au problème posé: La fonction k, puisque nous savons que k convient et que nous venons de montrer que si f est une fonction vérifiant la condition souhaitée, necessairement $f = k$.

Q 15

a. Soit $m \in [0, +\infty[$. Étudions les variations de la fonction $h_m : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & mx - e^x + 1 \end{cases}$, $h'_m(x) = m - e^x$.

Distinguons donc deux cas:

– $m > 1$. La fonction h_m possède un maximum sur I et donc $m \in M(f)$ et $f^\star(m) = m \ln m - m + 1$.

x	0		$\ln m$		$+\infty$
$h'_m(x)$		$+$	0	$-$	
$h_m(x)$	0	$\nearrow$	$m \ln m - m + 1$	$\searrow$	$-\infty$

– $m \leq 1$. La fonction h_m est décroissante sur I et possède un maximum atteint en $x = 0$. Par conséquent, $m \in M(f)$ et $f^\star(m) = h_m(0) = 0$.

En conclusion, $M(f) = [0, +\infty[$ et

$$f^\star : \begin{cases} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ m & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } m \leq 1 \\ m \ln m - m + 1 & \text{si } m > 1 \end{cases} \end{cases}$$

Q 16

a. Soit (x,m) un couple de réels positifs, nous savons que $f(m) + f^\star(x) \geq mx$, on tire de cette relation: $mx - f^\star(x) \leq f(m)$. Ceci nous montre que l'ensemble $\{mx - f^\star(x), x \in I\}$ est majoré par $f(m)$, donc $m \in M(f^\star$ et comme $(f^\star)^\star(m)$ est la borne supérieure c'est à dire le plus petit des majorants de cet ensemble, nous avons $(f^\star)^\star(m) \leq f(m)$

b. Posons $\phi : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0) \end{cases}$. La fonction ϕ est deux fois dérivable sur I et $\forall x \in I$, $\phi'(x) = f'(x) - f'(x_0)$, $f''(x) = f''(x) \geq 0$. On en déduit que ϕ est croissante et puisque $\phi'(x_0) = 0$, on en tire les variations de ϕ:

x	0		x_0		$+\infty$
$\phi''(x)$			$+$		
$\phi'(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	
$\phi(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Par conséquent, $\forall x \in I$, $\phi(x) \geq 0$.

c. L'inégalité précedente permet de dire que si x_0 et x sont deux réels de $[0, +\infty[$, alors:

$$xf'(x_0) - f(x) \leq x_0 f'(x_0) - f(x_0)$$

. De cette relation, on tire d'une part que $\sup\{xf'(x_0) - f(x), x \in I\} = x_0 f'(x_0) - f(x_0)$, c'est à dire $f^\star(f'(x_0) = x_0 f'(x_0) - f(x_0)$, et l'on récupère aussi:

$$f(x_0) \leq x_0 f'(x_0) - f^\star(f'(x_0)) \leq \sup\{x_0 t - f^\star(t), t \in I\}$$

Ce dernier point montre que $f(x_0) \leq (f^\star)^\star(x_0)$, ce qui prouve le point demandé.

d. Ayant établi pour $x \in I$ respectivement $f(x) \leq (f^\star)^\star(x)$ et $(f^\star)^\star(x) \leq f(x)$, on a montré qu'alors $f = (f^\star)^\star$.

$\boxed{Q\ 17}$

a. Soit x un réel strictement positif, l'utilisation de la formule des accroissements finis pour la fonction f' sur $[0,x]$ permet d'affirmer l'existence d'un réel d tel que $f'(x) = f''(d)x$, comme $f''(d) \geq c$, il vient l'inégalité souhaitée. De cette inégalité, on tire que $f' \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Comme f' est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$, elle réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $[f'(0), lim_\infty f'[= [0,+\infty[$.

b. Soit m un réel positif, posons $g_m(x) = mx - f(x)$, cette fonction est dérivable et pour x réel positif, on a $g'_m(x) = m - f'(x)$, comme f' réalise une bijection strictement croissante de $[0,+\infty[$ sur $[0,+\infty[$, en posant $x_0 = f'^{-1}(m)$, nous nous apercevons que g_m est croissante sur $[0,x_0]$ et décroissante sur $[x_0,+\infty[$, l'ensemble$\{mx - f(x), x \in I\}$ est donc majorée par $mx_0 - f(x_0)$. m est donc un élément de $M(f)$ et $f^\star(m) = m.(f')^{-1}(m) - f(f'^{-1}(m))$, ceci étant établi pour tout élément m de $[0,+\infty[$ donc $M(f) = [0,+\infty[$. D'autre part, si pour x réel positif, on pose $m = f'(x)$, en utilisant le travail précédent, on obtient bien la relation demandée.

c. Nous savons que la fonction f' est dérivable sur $[0,+\infty[$ et

$$\forall x \in [0,+\infty[\qquad (f')'(x) \neq 0$$

donc $(f')^{-1}$ est dérivable sur $f'([0,+\infty)$ c'est à dire sur $[0,+\infty[$. $f^\star$ apparait comme somme et composée de fonctions dérivables, $f^\star$ est dérivable sur $[0,+\infty[$. Pour obtenir une expression de $(f^\star)'$, on peut partir de la relation :

$$\forall x \in [0,+\infty[\qquad f^\star(f'(x)) = xf'(x) - f(x)$$

En dérivant, on obtient pour $x \in [0,+\infty[$:

$$f''(x) \times (f^\star)'(f'(x) = xf''(x)$$

Or, $f''(x) \neq 0$, donc :

$$\forall x \in [0,+\infty[\qquad (f^\star)' \circ f'(x) = x$$

Autrement dit $(f^\star)'of' = Id_{[0,+\infty[}$

$\boxed{Q\ 18}$ Étudions les deux cas vus dans la première partie :

1. $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. On sait alors que $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Montrons que dans ce cas $\boxed{M(f) = [0,+\infty[}$. Soit $m \in \mathbb{R}^+$, puisque $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, il existe $x_0 \in I$ tel que $m \leq f'(x_0)$. En utilisant la question 16, on obtient alors
$$mx - f(x) \leq f'(x_0)x - f(x) \leq x_0 f'(x_0) - f(x_0) = K$$
ce qui montre que h_m est majorée par K et donc que $m \in M(f)$.
2. $g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} a \in \mathbb{R}$. D'après la première partie, on sait que $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} a$.
   - Montrons que $M(f) \subset [0,a]$. Soit $m \in M(f)$. $\forall x > 0$, $mx - f(x) \leq f^\star(m)$ et donc
   $$\forall x > 0,\ m \leq \frac{f(x)}{x} + \frac{f^\star(m)}{x} = g(x) + \frac{f^\star(m)}{x}$$
   Mais puisque $g(x) + \dfrac{f^\star(m)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} a$, par passage à la limite dans les inégalités, il vient que $m \leq a$.
   - Montrons que $[0,a[\subset M(f)$. Soit $m < a$. Comme $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} a$, il existe $x_0 \in I$ tel que $m \leq f'(x_0)$. Mais alors, si $x \in I$, en utilisant la question 16,
   $$h_m(x) = mx - f(x) \leq f'(x_0)x - f(x) \leq x_0 f'(x_0) - f(x_0) = K$$
   et donc h_m est majorée par K ce qui montre que $m \in M(f)$.

   Pour voir si $a \in M(f)$, étudions les deux cas vus à la question 8.
   (a) Il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) - ax \xrightarrow[x\to+\infty]{} b$. Montrons que $\boxed{M(f) = [0,a]}$. Il suffit de vérifier que $a \in M(f)$. La fonction définie sur I par $h_a(x) = ax - f(x)$ est croissante et tend vers b en $+\infty$. Par conséquent, $\forall x \in I$, $\theta(x) \leq b$. Donc $\forall x \in I$, $h_a(x) = ax - f(x) \leq b$ ce qui montre que h_a est majorée et donc que $a \in M(f)$.
   (b) $f(x) - ax \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$. Montrons que $\boxed{M(f) = [0,a[}$. Il suffit de montrer que $a \notin M(f)$. La fonction h_a est croissante sur I et tend vers $+\infty$. Elle n'est pas majorée et donc $a \notin M(f)$.