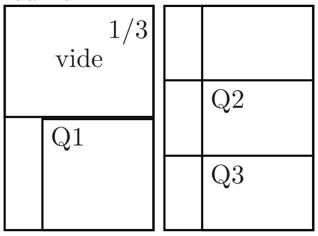
MPSI 1-2-3

DS 04

le 17 décembre 2003

Présentation des copies :

- Utiliser des copies doubles uniquement ;
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille et une demi-page sur la première feuille pour les remarques du correcteur. Numéroter les feuilles doubles en indiquant le nombre total de feuilles doubles (par exemple 1/3, 2/3, 3/3). Indiquer le nom sur chaque double feuille.



- Les questions doivent être traitées dans l'ordre de l'énoncé, correctement numérotées et un trait horizontal doit les séparer ; si une question n'est pas traitée, laisser un espace blanc.
- Ne pas utiliser de crayon de papier. Tirer deux traits diagonaux à l'encre pour supprimer une partie de la copie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Passer souvent à la ligne et espacer les formules.

Rédaction mathématique :

- Annoncer avant une démonstration, le résultat à prouver et respecter les plans de démonstration.
- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie ;
- Pour montrer une équivalence, l'écrire en numérotant les propositions (i) et (ii) ;
- Chaque résultat annoncé doit être *justifié* en citant précisément un théorème du cours avec ses *hypothèses exactes*, ou en *citant le numéro d'une question précédente* du problème.
- Les résultats de calcul doivent être *simplifiés* et *encadrés*.
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases en Français :
- Les notations de l'énoncé doivent être respectées ;

1 Exercice

$\boxed{Q\ 1}$ Déterminer un équivalent simple de la suite de terme général

$$u_n = \frac{\operatorname{th} n - \cos(e^{-n})}{\ln(\operatorname{ch} n)}$$

2 Problème

On rappelle le théorème de Bezout utilisé dans ce problème :

Théorème 1. *Deux entiers relatifs $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ sont premiers entre eux si et seulement s'il existe un couple d'entiers $(u,v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $up + vq = 1$.*

On dit qu'une fraction rationnelle $\dfrac{p}{q}$ est *irréductible* lorsque $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^\star$ et p et q sont deux entiers premiers entre eux. On utilisera également sans démonstration que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

2.1 Partie 1

$\boxed{Q\ 2}$ Soient quatre entiers relatifs $(p,q,p',q') \in \mathbb{Z}^4$ vérifiant

$$p + q\sqrt{2} = p' + q'\sqrt{2}$$

Montrer que $p = p'$ et $q = q'$.

$\boxed{Q\ 3}$

a. Montrer en utilisant la formule du binôme que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe deux entiers $(p_n,q_n) \in (\mathbb{N}^\star)^2$ tels que
$$(1+\sqrt{2})^{n+1} = p_n + q_n\sqrt{2}$$

b. Montrer que l'on a également
$$(1-\sqrt{2})^{n+1} = p_n - q_n\sqrt{2}$$

c. Montrer que le couple (p_n,q_n) est unique.

$\boxed{Q\ 4}$

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{cases} p_{n+1} &= p_n + 2q_n \\ q_{n+1} &= p_n + q_n \end{cases}$$

b. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n \geq q_n \geq 2^n$.

$\boxed{Q\ 5}$ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = (-1)^n$$

$\boxed{Q\ 6}$

a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fraction $r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ est irréductible.

b. Déterminer un équivalent des suites (p_n) et (q_n). En déduire la limite de la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c. Vérifier que :

$$\begin{cases} r_0 &= 1 \\ r_1 &= 1 + \dfrac{1}{2} \\ r_2 &= 1 + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{2}} \end{cases}$$

et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{1 + r_n}$

En réitérant, nous pouvons donc écrire (avec n traits de fractions),

$$r_n = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cdots + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}$$

2.2 Partie 2

Dans la suite du problème, on définit une *fraction continue* comme une suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\forall n \in \mathbb{N}$, $r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$, $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N}^\star$ vérifiant les trois propriétés :

1. $r_0 \in \mathbb{Z}$,
2. $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = (-1)^n$,
3. $\forall n \geq 1$, $q_n < q_{n+1}$.

$\boxed{Q\ 7}$

a. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, la fraction $r_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ est irréductible.

b. Vérifier que $q_0 = 1$ et $p_0 \in \mathbb{Z}$.

c. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $q_n \geq n$.

On définit pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = r_{2n}$ et $w_n = r_{2n+1}$.

$\boxed{Q\ 8}$

a. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer le signe de $\alpha_k = [r_{k+2} - r_{k+1}] + [r_{k+1} - r_k]$.

b. En déduire que les suites (v_n) et (w_n) sont strictement monotones et adjacentes.

c. Montrer que la suite (r_n) converge vers un réel x (on demande une démonstration détaillée).

d. On définit pour $n \in \mathbb{N}$,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{q_k q_{k+1}}$$

Montrer que la suite (S_n) converge et que

$$x = r_0 + \lim_{n\to+\infty} S_n$$

$\boxed{Q\ 9}$

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < |x - r_n| < \dfrac{1}{q_n^2}$.

b. En déduire que x est irrationnel.

2.3 Partie 3

Réciproquement, soit un nombre irrationnel $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Nous allons montrer qu'il existe une fraction continue $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x.
On définit une fonction f par $f(x) = \dfrac{1}{x - E(x)}$ et on note $I = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres irrationnels.

$\boxed{Q\ 10}$ Montrer que I est inclus dans l'ensemble de définition de la fonction f et que $f(I) \subset I$.

On peut donc définir $f^2(x) = f\big(f(x)\big)$ et plus généralement définir par récurrence pour $n \in \mathbb{N}^\star$, $f^{n+1}(x) = f^n\big(f(x)\big)$.
On pose alors

$$a_0 = E(x),\ a_1 = E\big(f(x)\big), \dots, a_n = E\big(f^n(x)\big)$$

$\boxed{Q\ 11}$ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, $a_n \geq 1$.

et on définit par récurrence les suites (p_n) et (q_n) en posant :

$$\begin{cases} p_0 & = a_0 \\ q_0 & = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} p_1 & = 1 + a_0 a_1 \\ q_1 & = a_1 \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} p_{n+2} & = a_{n+2} p_{n+1} + p_n \\ q_{n+2} & = a_{n+2} q_{n+1} + q_n \end{cases}$$

$\boxed{Q\ 12}$ Vérifier que la suite $(r_n) = (\dfrac{p_n}{q_n})$ est une fraction continue.

$\boxed{Q\ 13}$

a. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{n+2}(x) = \dfrac{x q_n - p_n}{p_{n+1} - x q_{n+1}}$.

b. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x = \dfrac{p_{n+1} f^{n+2}(x) + p_n}{q_{n+1} f^{n+2}(x) + q_n}$.

$\boxed{Q\ 14}$

a. Déterminer pour $n \in \mathbb{N}$ le signe de $x - r_n$.

b. En déduire que la suite (r_n) converge vers x.

$\boxed{Q\ 15}$ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $q_{n+2} \geq 2q_n$ et en déduire une amélioration de l'inégalité $q_n \geq n$.

$\boxed{Q\ 16}$ En utilisant les résultats précédents, montrer qu'un réel x est irrationnel si et seulement s'il existe une infinité de nombres rationnels $\dfrac{p}{q}$ tels que $|x - \dfrac{p}{q}| < \dfrac{1}{q^2}$

Corrigé.

$\boxed{Q\ 1}$ Cherchons un équivalent du numérateur en écrivant

$$a_n = [\operatorname{th} n - 1] + [1 - \cos(e^{-n})] = \alpha_n + \beta_n$$

En utilisant la définition de la tangente hyperbolique, $\alpha_n = \operatorname{th} n - 1 = \dfrac{-2e^{-n}}{e^n + e^{-n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} -2e^{-2n}$ (puisque $e^{-n} = o(e^n)$). En utilisant l'équivalent classique du cos, $\beta_n = 1 - \cos(e^{-n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{e^{-2n}}{2}$ (car $e^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$). Montrons alors que $\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{3}{2}e^{-2n}}$. Cherchons la limite du quotient,

$$q_n = \frac{a_n}{-3e^{-2n}/2} = \frac{\alpha_n}{-3e^{-2n}/2} + \frac{\beta_n}{-3e^{-2n}/2}$$

En utilisant les équivalents calculés, $\dfrac{\alpha_n}{-3e^{-2n}/2} \sim \dfrac{4}{3}$ et $\dfrac{\beta_n}{-3e^{-2n}/2} \sim -\dfrac{1}{3}$. On a bien $q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
Pour le dénominateur, écrivons

$$\ln(\operatorname{ch} n) = \ln\Big[\frac{e^n + e^{-n}}{2}\Big] = \ln\Big[\frac{e^n}{2}(1 + e^{-n})\Big] = n - \ln 2 + \ln(1 + e^{-2n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$$

puisque $\ln 2 = o(n)$ et $\ln(1 + e^{-2n}) = o(n)$.
Finalement, $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{3}{2}\dfrac{e^{-2n}}{n}}$.

$\boxed{Q\ 2}$ Montrons que $q = q'$ par l'absurde. Si $q \neq q'$, on aurait $\sqrt{2} = \dfrac{p - p'}{q' - q} \in \mathbb{Q}$ ce qui est faux puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel. Il vient ensuite que $p = p'$.

$\boxed{Q\ 3}$

a. Posons

$$\boxed{\begin{cases} p_n &= \displaystyle\sum_{p=0}^{E(\frac{n+1}{2})} \binom{n+1}{2p} 2^p \in \mathbb{N}^\star \\ q_n &= \displaystyle\sum_{p=0}^{E(\frac{n}{2})} \binom{n+1}{2p+1} 2^p \in \mathbb{N}^\star \end{cases}}$$

En utilisant la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}
(1+\sqrt{2})^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \sqrt{2}^k \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}} \binom{n+1}{k} \sqrt{2}^k + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}} \binom{n+1}{k} \sqrt{2}^k \\
&= \sum_{p=0}^{E(\frac{n+1}{2})} \binom{n+1}{2p} 2^p + \sum_{p=0}^{E(\frac{n}{2})} \binom{n+1}{2p+1} 2^p \sqrt{2} \\
&= p_n + q_n\sqrt{2}
\end{aligned}$$

b. Il suffit de reprendre le développement du binôme précédent.

c. L'unicité provient directement de la question 2.

$\boxed{Q\ 4}$

a. Écrivons

$$(1+\sqrt{2})^{n+2} = (1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})^{n+1} = (1+\sqrt{2})(p_n + q_n\sqrt{2}) = (p_n + 2q_n) + (p_n + q_n)\sqrt{2}$$

D'après l'unicité de (p_{n+1}, q_{n+1}) on en déduit les formules demandées.

b. Par récurrence :

$$\mathcal{P}(n) : \ p_n \geq q_n \geq 2^n$$

$\mathcal{P}(0)$: on a $p_0 = q_0 = 1$ et les inégalités sont bien vérifiées.
$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$: d'après $\mathcal{P}(n)$, $p_n \geq q_n \geq 2^n$. Alors

- $p_{n+1} = p_n + 2q_n \geq p_n + q_n = q_{n+1}$.
- $q_{n+1} = p_n + q_n \geq 2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

$\boxed{Q\ 5}$ Par récurrence,

$$\mathcal{P}(n) : \ p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = (-1)^n$$

$\mathcal{P}(0)$: on a vu que $p_0 = q_0 = 1$ et on calcule $p_1 = 3$, $q_1 = 2$. Alors $p_1q_0 - q_1p_0 = 1 = (-1)^0$.
$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ Calculons

$$\begin{aligned} p_{n+2}q_{n+1} - q_{n+2}p_{n+1} &= (p_{n+1} + 2q_{n+1})(p_n + q_n) - (p_{n+1} + q_{n+1})(p_n + 2q_n) \\ &= -p_{n+1}q_n + q_{n+1}p_n \\ &= -(-1)^n \quad (\text{ d'après } \mathcal{P}(n)) \\ &= (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

$\boxed{Q\ 6}$

a. D'après la question 5, en posant $u = (-1)^n p_{n+1}$ et $v = -(-1)^n q_{n+1}$, on a

$$up_n + vq_n = 1$$

D'après le théorème de Bezout, il vient que les entiers p_n et q_n sont premiers entre eux.

b. En utilisant la question 3, on tire

$$\begin{cases} p_n &= \dfrac{(1+\sqrt{2})^{n+1} + (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2} \\ q_n &= \dfrac{(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2\sqrt{2}} \end{cases}$$

et en posant $k_1 = 1 + \sqrt{2} > 1$, $k_2 = 1 - \sqrt{2}$, ($|k_2| < 1$), on a $k_2^{n+1} = o(k_1^{n+1})$. Il vient donc que $\boxed{p_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(1+\sqrt{2})^{n+1}}{2}}$ et $\boxed{q_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{(1+\sqrt{2})^{n+1}}{2\sqrt{2}}}$. Alors $r_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2}$ et donc $\boxed{r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{2}}$.

c. On calcule à l'aide des formules de la question 4, $p_0 = 1$,$q_0 = 1$, $p_1 = 3$,$q_1 = 2$, $p_2 = 7$,$q_2 = 5$ et alors $r_0 = 1$, $r_1 = \dfrac{3}{2} = 1 + \dfrac{1}{2}$ et $r_2 = \dfrac{7}{5} = 1 + \dfrac{1}{\frac{5}{2}} = 1 + \dfrac{1}{2 + \frac{1}{2}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant les mêmes formules,

$$r_{n+1} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = \frac{p_n + 2q_n}{p_n + q_n} = 1 + \frac{q_n}{p_n + q_n} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{p_n}{q_n}} = 1 + \frac{1}{1 + r_n}$$

$\boxed{Q\ 7}$

a. En utilisant la propriété 3 et Bezout comme à la question 6.
b. Facile puisque $r_0 \in \mathbb{N}$ et $p_0 \wedge q_0 = 1$.
c. Récurrence facile en utilisant que la suite *d'entiers* (q_n) est strictement croissante et que $q_1 \geq 1$.

$\boxed{Q\ 8}$

a. Écrivons

$$\begin{aligned} (r_{k+2} - r_{k+1}) + (r_{k+1} - r_k) &= \frac{p_{k+2}q_{k+1} - p_{k+1}q_{k+2}}{q_{k+2}q_{k+1}} + \frac{p_{k+1}q_k - p_kq_{k+1}}{q_kq_{k+1}} \\ &= (-1)^k \frac{q_{k+2} - q_k}{q_kq_{k+1}q_{k+2}} \end{aligned}$$

Mais on sait que $q_k < q_{k+2}$. Par conséquent, si k est pair, $\alpha_k > 0$ et si k est impair, $\alpha_k < 0$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons

$$w_{n+1} - w_n = r_{2n+3} - r_{2n+1} = \alpha_{2n+1} < 0$$

$$v_{n+1} - v_n = r_{2n+2} - r_{2n} = \alpha_{2n} > 0$$

La suite (v_n) est donc strictement croissante et la suite (w_n) strictement décroissante. Calculons également en utilisant la propriété 3,

$$w_n - v_n = \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} - \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = \frac{p_{2n+1}q_{2n} - q_{2n+1}p_{2n}}{q_{2n}q_{2n+1}} = \frac{1}{q_{2n}q_{2n+1}}$$

Majorons donc en utilisant 7c,

$$|w_n - v_n| \le \frac{1}{2n(2n+1)}$$

la suite $(d_n) = (w_n - v_n)$ converge vers 0 d'après le théorème de majoration.

c. Les deux suites (r_{2n}) et (r_{2n+1}) sont adjacentes donc convergent vers la même limite $x \in \mathbb{R}$. On montre alors (question de cours) que la suite (r_n) converge vers x.

d. Soit $n \in \mathbb{N}$, on calcule

$$r_{n+1} = (r_{n+1} - r_n) + (r_n - r_{n-1}) + \cdots + (r_1 - r_0) + r_0 = \sum_{k=0}^{n}(r_{k+1} - r_k)$$

Mais comme $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $r_{k+1} - r_k = \dfrac{p_{k+1}q_k - p_k q_{k+1}}{q_k q_{k+1}} = \dfrac{(-1)^k}{q_k q_{k+1}}$, il vient que

$$S_n = r_{n+1} - r_0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} x - r_0$$

$\boxed{Q\ 9}$

a. D'après la question précédente, comme la suite (v_n) est *strictement* croissante et converge vers x, $\forall k \in \mathbb{N}$, $v_k < x$. En effet, s'il existait $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x \le v_{k_0}$, on aurait pour $k \ge k_0+1$, $x \le v_{k_0} < v_{k_0+1} < v_k$ et par passage à la limite dans les inégalités lorsque $k \to +\infty$, on aurait $x < v_{k_0+1} \le x$ ce qui est absurde.
On montre de même que $\forall k \in \mathbb{N}$, $x < w_k$. Soit alors $n \in \mathbb{N}$,
- si n est pair, $r_n < x < r_{n+1}$,
- si n est impair, $r_{n+1} < x < r_n$.

Dans les deux cas, on a $|x - r_n| < |r_{n+1} - r_n|$. Mais comme

$$r_{n+1} - r_n = \frac{p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1}}{q_n q_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}$$

il vient que

$$|x - r_n| < \frac{1}{q_n q_{n+1}} < \frac{1}{q_n^2}$$

(puisque $q_n < q_{n+1}$).

b. Supposons par l'absurde x rationnel. Il existerait $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$ tels que $x = \frac{p}{q}$ et d'après a), on aurait :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < |pq_n - qp_n| < \frac{q}{q_n}$$

En particulier, pour $n = q$, puisque $q_q \ge q$, on aurait

$$0 < |pq_q - qp_q| < 1$$

ce qui est impossible puisque $|pq_q - qp_q|$ est un entier.

$\boxed{Q\ 10}$ Soit $x \in I$. On montre par l'absurde que $x \neq E(x)$ sinon x serait un entier. Par conséquent, $f(x)$ est bien défini. Soit $y \in f(I)$. Il existe $x \in I$ tel que $y = f(x)$. Montrons par l'absurde que $y \in I$. Si y était rationnel, il existerait $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star$ tels que $y = \dfrac{p}{q}$ mais alors on aurait $x = \dfrac{pE(x)+q}{p}$ qui serait rationnel ce qui est faux.

$\boxed{Q\ 11}$ Soit $n \geq 1$. On a vu que $f^{n-1}(x) \in I$. Par conséquent, $E\big(f^{n-1}(x)\big) < f^{n-1}(x) < E\big(f^{n-1}(x)\big) + 1$ et donc $f^n(x) = \dfrac{1}{f^{n-1}(x) - E(x)} > 1$ et donc $a_n = E(f^n(x)) \geq 1$.

$\boxed{Q\ 12}$ Vérifions les trois propriétés de l'énoncé.

1. On a $r_0 = p_0/q_0 = a_0 \in \mathbb{Z}$.
2. Montrons par récurrence la deuxième propriété :

$$\mathcal{P}(n) :\ p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n = (-1)^n$$

$\mathcal{P}(0)$: $\quad p_1q_0 - q_1p_0 = (1 + a_0a_1) - a_1a_0 = 1$
$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$:

$$\begin{aligned} p_{n+2}q_{n+1} - q_{n+2}p_{n+1} &= (a_{n+2}p_{n+1} + p_n)q_{n+1} - (a_{n+2}q_{n+1} + q_n)p_{n+1} \\ &= -(p_{n+1}q_n - q_{n+1}p_n) \\ &= -(-1)^n \quad (\text{ d'après } \mathcal{P}(n)) \\ &= (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

3. Soit $n \geq 1$. Comme $n+1 \geq 2$, et que d'après Q11, $a_{n+1} \geq 1$,

$$q_{n+1} - q_n = (a_{n+1} - 1)q_n + q_{n-1} \geq q_{n-1} > 0$$

$\boxed{Q\ 13}$ Montrons ce résultat par récurrence.

$$\mathcal{P}(n) :\ f^{n+2}(x) = \frac{xq_n - p_n}{p_{n+1} - xq_{n+1}}$$

$\mathcal{P}(0)$: Calculons $\dfrac{xq_0 - p_0}{p_1 - xq_1} = \dfrac{x - a_0}{1 + a_0a_1 - a_1x}$ et également

$$f^2(x) = \frac{1}{f(x) - E(f(x))} = \frac{1}{\frac{1}{x - E(x)} - a_1} = \frac{1}{\frac{1}{x - a_0} - a_1} = \frac{x - a_0}{1 + a_0a_1 - a_1x}$$

Ces deux expressions sont bien égales.
$\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$: Calculons

$$\begin{aligned} f^{n+3}(x) &= f\big(f^{n+2}(x)\big) \\ &= \frac{1}{f^{n+2}(x) - E\big(f^{n+2}(x)\big)} \\ &= \frac{1}{\dfrac{xq_n - p_n}{p_{n+1} - xq_{n+1}} - a_{n+2}} \quad (\text{ d'après } \mathcal{P}(n) \text{ et la définition de } a_{n+2}) \\ &= \frac{xq_{n+1} - p_{n+1}}{[a_{n+2}p_{n+1} + p_n] - x[a_{n+2}q_{n+1} + q_n]} \\ &= \frac{xq_{n+1} - p_{n+1}}{p_{n+2} - xq_{n+2}} \quad (\text{ en utilisant la relation de récurrence sur } p_n, q_n) \end{aligned}$$

La deuxième formule s'obtient immédiatement à partir de la première.

$\boxed{Q\ 14}$

a. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculons

$$\begin{aligned} x - r_n &= \frac{p_{n+1}f^{n+2}(x) + p_n}{q_{n+1}f^{n+2}(x) + q_n} - \frac{p_n}{q_n} \\ &= \frac{(p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1})f^{n+2}(x)}{q_nq_{n+1}f^{n+2}(x) + q_n^2} \\ &= \frac{(-1)^n f^{n+2}(x)}{q_nq_{n+1}f^{n+2}(x) + q_n^2} \end{aligned}$$

Mais $1 \leq a_{n+2} \leq f^{n+2}(x)$, $f^{n+2}(x) > 0$ et également $q_n > 0$, $q_{n+1} > 0$. Le signe de $x - r_n$ est donc celui de $(-1)^n$.

b. On a pour $k \in \mathbb{N}$, $r_{2k} \leq x \leq r_{2k+1}$ et donc $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|x - r_n| \leq |r_{n+1} - r_n| = |\frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}| \leq \frac{1}{q_n^2}$$

Puisque $q_n \geq n$, $q_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et donc (r_n) converge vers x.

$\boxed{Q\ 15}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $q_{n+2} = a_{n+1}q_{n+1} + q_n$ et que $a_{n+1} \geq 1$, $q_{n+1} > q_n$, on tire que $q_{n+2} > 2q_n$. On montre ensuite facilement par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} q_{2k} \geq 2^k q_0 \geq 2^k \\ q_{2k+1} \geq 2^k q_1 \geq 2^k \end{cases}$$

et on déduit ensuite de ces deux relations que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{q_n \geq 2^{E(n/2)}}$$

$\boxed{Q\ 16}$ Commencons par établir que si x est un nombre rationnel il n'existe qu'un nombre fini de rationnels $\frac{p}{q}$ (on part toujours d'une forme irreductible avec $q > 0$) vérifiant

$$|x - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$$

pour cela partons d'une écriture irreductible de $x = \frac{h}{t}$ avec h et t deux entiers naturels ($t \neq 0$). Nous nous interessons donc aux rationnnels sous la forme $\frac{p}{q}$ vérifiant

$$|\frac{h}{t} - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$$

ce qui peut aussi s'écrire :

$$|q(hq - pt)| < t$$

Ceci signifie que

$$\exists m \in \{0,..,t\} \qquad q(hq - pt) = \pm m$$

Traitons le cas $m = 0$, dans ce cas cela impose $hq - pt = 0$ donc finalement $\frac{p}{q} = \frac{h}{t}$, si $m \neq 0$ alors $q \leq m \leq t$, il existe donc un nombre fini de q possibles. Mais dès que q est fixé, il existe un nombre fini de p possible puisque on doit avoir $hq - pt = \pm\frac{m}{q}$ Ce qui montre qu'il y a qu'un nombre fini de rationnels $\frac{p}{q}$ vérifiant la relation demandée. Supposons maintenant que x soit un irrationnel, le travail précédent a mis en evidence une suite de rationnels $\frac{p_n}{q_n}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad |x - \frac{p_n}{q_n}| \leq \frac{1}{q_n q_{n+1}} \leq \frac{1}{q_n}$$

ce qui prouve le point demandé.