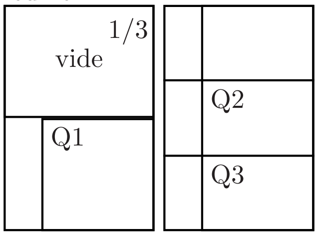
MPSI 1-2-3

DS 03

le 26 novembre 2003

Présentation des copies :

- Utiliser des copies doubles uniquement ;
- Laisser une marge à gauche de chaque feuille et une demi-page sur la première feuille pour les remarques du correcteur. Numéroter les feuilles doubles en indiquant le nombre total de feuilles doubles (par exemple 1/3, 2/3, 3/3). Indiquer le nom sur chaque double feuille.



- Les questions doivent être traitées dans l'ordre de l'énoncé, correctement numérotées et un trait horizontal doit les séparer ; si une question n'est pas traitée, laisser un espace blanc.
- Ne pas utiliser de crayon de papier. Tirer deux traits diagonaux à l'encre pour supprimer une partie de la copie.
- L'énoncé ne doit pas être recopié sur les copies.
- Passer souvent à la ligne et espacer les formules.

Rédaction mathématique :

- Annoncer avant une démonstration, le résultat à prouver et respecter les plans de démonstration.
- Chaque variable utilisée dans une démonstration doit être définie ;
- Pour montrer une équivalence, l'écrire en numérotant les propositions (i) et (ii) ;
- Chaque résultat annoncé doit être *justifié* en citant précisément un théorème du cours avec ses *hypothèses exactes*, ou en *citant le numéro d'une question précédente* du problème.
- Les résultats de calcul doivent être *simplifiés* et *encadrés.*
- Les calculs doivent être détaillés et expliqués à l'aide de phrases en Français :
- Les notations de l'énoncé doivent être respectées ;

1 Problème 1

On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ le cercle $\mathcal{C}_t$ de centre $\Omega_t \begin{vmatrix} 0 \\ t \end{vmatrix}$ et tangent à l'axe (Ox) où $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$.

$\boxed{Q\ 1}$ Écrire l'équation cartésienne du cercle $\mathcal{C}_t$.

$\boxed{Q\ 2}$ On considère un point $A \begin{vmatrix} \alpha \\ 0 \end{vmatrix}$ $(\alpha \neq 0)$ de l'axe (Ox) et une droite passant par A non-verticale et non-horizontale d'équation cartésienne

$$\mathcal{D}_m \ : y = m(x - \alpha) \quad (m \neq 0)$$

a. On suppose que $\alpha^2 \neq t^2$. Déterminer m pour que la droite $\mathcal{D}_m$ soit tangente au cercle $\mathcal{C}_t$.
b. Déterminer l'équation cartésienne de la droite non-horizontale issue de A et tangente au cercle $\mathcal{C}_t$. On vérifiera que cette équation est valable même si $\alpha^2 = t^2$.

$\boxed{Q\ 3}$ On considère désormais deux points distincts $A \begin{vmatrix} \alpha \\ 0 \end{vmatrix}$ et $B \begin{vmatrix} \beta \\ 0 \end{vmatrix}$ $(\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0)$ sur l'axe (Ox). On mène de A et B les tangentes non-horizontales au cercle $\mathcal{C}_t$ et on note M de point d'intersection de ces tangentes lorsqu'il existe. Déterminer les coordonnées x et y du point M.

$\boxed{Q\ 4}$ Montrer que les coordonnées du point M vérifient l'équation

$$\mathcal{C} :\ 4\alpha\beta x^2 + (\alpha + \beta)^2 y^2 - 4\alpha\beta(\alpha + \beta)x = 0$$

Par conséquent, lorsque le rayon $|t|$ du cercle varie, le point d'intersection des tangentes au cercle issues de A et B se trouve sur la courbe $\mathcal{C}$.

$\boxed{Q\ 5}$ Dans cette question, on suppose que $\alpha = 1$ et $\beta = -1$. Reconnaître la courbe $\mathcal{C}$.

$\boxed{Q\ 6}$ On suppose dans cette question que $\alpha = 2$ et $\beta = -1$. Vérifier que la courbe $\mathcal{C}$ est une hyperbole. On calculera son excentricité et on donnera les coordonnées de ses foyers dans le repère $\mathcal{R}$.

$\boxed{Q\ 7}$ On suppose que $0 < \alpha < \beta$. Montrer que la courbe $\mathcal{C}$ est une ellipse de foyers A et B. On calculera l'excentricité de l'ellipse ainsi que les équations cartésiennes des directrices dans le repère $\mathcal{R}$.

2 Problème 2

`Les parties 2.2 et 2.3 sont indépendantes mais utilisent des résultats de la partie 2.1.`

On dit qu'une application $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$ à valeurs *positives* est une *demi-norme* si et seulement si elle vérifie les trois propriétés :

- (H_1) : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,
- (H_2) : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xy) = f(x)f(y)$,
- (H_3) : il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) \leq C \max\big(f(x), f(y)\big)$.

2.1 Généralités

$\boxed{Q\ 8}$ On suppose que f est une demi-norme.

a. Calculer $f(1)$ et $f(-1)$.
b. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)$.
c. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^\star,\ f\big(\frac{1}{x}\big) = \frac{1}{f(x)}$.

$\boxed{Q\ 9}$ Pour une demi-norme f, on définit l'ensemble

$$D = \{f(1+z);\ z \in \mathbb{R},\ f(z) \leq 1\}$$

a. Montrer que D possède une borne supérieure notée C_f.
b. Vérifier que $C_f \geq 1$.

$\boxed{Q\ 10}$ Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) \leq C_f \max\big(f(x),f(y)\big)$.

Si la fonction f vérifie en plus des propriétés (H_1), (H_2) et (H_3) la propriété

$$(H_4)\ : \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) \leq f(x) + f(y)$$

on dit que f est une *norme*.

$\boxed{Q\ 11}$ Montrer que la fonction $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$ est une norme et calculer C_g.

$\boxed{Q\ 12}$ Montrer que la fonction $h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$ est une demi-norme, mais pas une norme. Calculer C_h.

$\boxed{Q\ 13}$ Montrer que si f est une norme, alors $C_f \leq 2$.

2.2 Une réciproque

Nous allons montrer la réciproque : on considère une demi-norme f et l'on suppose que $C_f \leq 2$. Nous allons montrer que f est une norme.

$\boxed{Q\ 14}$ Montrer par récurrence que $\forall r \in \mathbb{N}^\star$, $\forall (x_0, \dots, x_{2^r-1}) \in \mathbb{R}^{2^r}$,

$$f(x_0 + \cdots + x_{2^r-1}) \leq C_f^r \max\big(f(x_0), \dots, f(x_{2^r-1})\big)$$

$\boxed{Q\ 15}$ Soit un entier $a \in \mathbb{N}^\star$.

a. Montrer qu'il existe un entier $r \in \mathbb{N}^\star$ tel que $2^{r-1} \leq a < 2^r$. On explicitera r en fonction de a.
b. En déduire que $f(a) \leq 2a$.

$\boxed{Q\ 16}$ Soit $r \in \mathbb{N}$. On pose $n = 2^r - 1$. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f\big((x+y)^n\big) \leq C_f^r \max_{0 \leq k \leq n} f\Big(\binom{n}{k}\Big) f(x)^k f(y)^{n-k} \leq 2^{r+1}\big[f(x) + f(y)\big]^n$$

$\boxed{Q\ 17}$ Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a. Montrer que $\forall r \in \mathbb{N}^\star$,

$$f(x+y) \leq 2^{\frac{r+1}{2^r-1}}\big[f(x) + f(y)\big]$$

b. Montrer que la suite $\big(2^{\frac{r+1}{2^r-1}}\big)_{r \geq 1}$ converge vers 1.
c. En déduire que f est une norme.

2.3 Caractérisation des demi-normes équivalentes pour l'ordre

$\boxed{Q\ 18}$ On considère l'application $i : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \end{array} \right.$. Montrer que i est une demi-norme (dite *triviale*).

On suppose désormais que f est une demi-norme non-triviale. On dit qu'une demi-norme g est *équivalente* à f si et seulement si :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) < f(y) \Longleftrightarrow g(x) < g(y)$$

$\boxed{Q\ 19}$ Soit $\alpha > 0$. On pose $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & f(x)^\alpha \end{array} \right.$. Vérifier que g est une demi-norme équivalente à f.

On considère désormais une demi-norme g équivalente à f. Nous allons montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $g = f^\alpha$.

$\boxed{Q\ 20}$

a. Montrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) > 1$.
b. Montrer que $g(x_0) > 1$.

Soit un réel $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) > 1$. On a également $g(x) > 1$. On définit alors les ensembles

$$A(f,x) = \{r \in \mathbb{Q} \mid f(x) < f(x_0)^r\} \text{ et } A(g,x) = \{r \in \mathbb{Q} \mid g(x) < g(x_0)^r\}$$

$\boxed{Q\ 21}$ Montrer que $A(f,x)$ possède une borne inférieure et que $\inf A(f,x) = \dfrac{\ln f(x)}{\ln f(x_0)}$.

On montre de même que $A(g,x)$ possède une borne inférieure et que $\inf A(g,x) = \dfrac{\ln g(x)}{\ln g(x_0)}$.

$\boxed{Q\ 22}$ Montrer que $A(f,x) = A(g,x)$.

$\boxed{Q\ 23}$ En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = f^\alpha(x)$.

Corrigé.

$\boxed{Q\ 1}$

$$\mathcal{C}_t :\ x^2 + y^2 - 2ty = 0$$

$\boxed{Q\ 2}$

a. La droite $\mathcal{D}_m$ est tangente au cercle si et seulement si $d^2(\Omega_t,\mathcal{D}_m) = t^2$, c'est à dire

$$\frac{(t+\alpha m)^2}{1+m^2} = t^2$$
$$tm\big[(\alpha^2 - t^2)m + 2\alpha t\big] = 0$$

et comme $m \neq 0$, $t \neq 0$, la condition devient $(\alpha^2 - t^2)m = -2\alpha t$. Si $\alpha = \pm t$, la droite tangente au cercle est verticale et il n'existe pas de valeur de m. Si $\alpha^2 \neq t^2$, on trouve que $m = \dfrac{2\alpha t}{t^2 - \alpha^2}$.

b. On peut écrire l'équation cartésienne de la droite sous la forme

$$\boxed{2\alpha t x + (\alpha^2 - t^2)y = 2\alpha^2 t}$$

et lorsque $\alpha^2 = t^2$, l'équation devient $x = \alpha$ qui est bien la droite verticale issue de A tangente au cercle.

$\boxed{Q\ 3}$ On résout le système

$$\begin{cases} 2\alpha t x + (\alpha^2 - t^2)y &= 2\alpha^2 t \\ 2\beta t y + (\beta^2 - t^2)y &= 2\beta^2 t \end{cases}$$

et l'on trouve lorsque $t^2 + \alpha\beta \neq 0$:

$$\boxed{M \left| \begin{array}{l} \dfrac{(\alpha+\beta)t^2}{t^2+\alpha\beta} \\ \dfrac{2\alpha\beta t}{t^2+\alpha\beta} \end{array} \right.}$$

$\boxed{Q\ 4}$ Un simple calcul :

$$\begin{aligned} 4\alpha\beta x^2 + (\alpha+\beta)^2 y^2 - 4\alpha\beta(\alpha+\beta)x &= \frac{4\alpha\beta(\alpha+\beta)^2 t^4}{(t^2+\alpha\beta)^2} + \frac{4(\alpha+\beta)^2\alpha^2\beta^2 t^2}{(t^2+\alpha\beta)^2} - \frac{4\alpha\beta\beta(\alpha+\beta)^2 t^2}{t^2+\alpha\beta} \\ &= \frac{4\alpha\beta(\alpha+\beta)^2}{(t^2+\alpha\beta)^2}\big[t^4 + \alpha\beta t^2 - t^2(t^2+\alpha\beta)\big] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\boxed{Q\ 5}$ L'équation de $\mathcal{C}$ devient dans ce cas $x = 0$. La courbe $\mathcal{C}$ est donc l'axe (Oy).

$\boxed{Q\ 6}$ L'équation de $\mathcal{C}$ devient après réduction :

$$\frac{(x-1/2)^2}{(1/2)^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$$

On reconnaît l'équation réduite d'une hyperbole avec $a = 1/2$ et $b = \sqrt{2}$. On calcule alors $c^2 = a^2 + b^2 = 9/4$ d'où $c = 3/2$. L'excentricité vaut $e = c/a = \boxed{3}$ et les foyers sont les points A et B.

$\boxed{Q\ 7}$ Réduisons l'équation de $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} 4\alpha\beta\big[x^2 - (\alpha+\beta)x\big] + (\alpha+\beta)^2y^2 &= 0 \\ 4\alpha\beta\big[x - \frac{\alpha+\beta}{2}\big]^2 + (\alpha+\beta)^2 y^2 &= \alpha\beta(\alpha+\beta)^2 \\ \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} &= 1 \end{aligned}$$

en effectuant le changement de repère $\mathcal{R}' = (P, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ défini par les formules :

$$\begin{cases} X &= x - \dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ Y &= y \end{cases}$$

et en posant $a = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $b = \alpha\beta$. On reconnaît l'équation réduite d'une ellipse, et on calcule

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{(\alpha-\beta)^2}{4}$$

d'où $c = \dfrac{\beta-\alpha}{2}$ et donc dans le repère $\mathcal{R}'$, $F\left|\begin{matrix}-c\\0\end{matrix}\right.$, $F\left|\begin{matrix}c\\0\end{matrix}\right.$. Dans le repère initial, on trouve que $F\left|\begin{matrix}\alpha\\0\end{matrix}\right. = A$ et $F'\left|\begin{matrix}\beta\\0\end{matrix}\right. = B$.

L'excentricité vaut $e = \dfrac{c}{a} = \boxed{\dfrac{\beta-\alpha}{\beta+\alpha}} < 1$. La première directrice a pour équation $X = -\dfrac{a^2}{c} = -\dfrac{(\alpha+\beta)^2}{2(\beta-\alpha)}$ d'où son équation cartésienne dans le repère initial :

$$\boxed{x = -\alpha\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}}$$

La seconde directrice a pour équation $X = \dfrac{a^2}{c}$ d'où son équation cartésienne dans le repère $\mathcal{R}$:

$$\boxed{x = \frac{\beta(\beta+\alpha)}{\beta-\alpha}}$$

$\boxed{Q\ 8}$

a. En utilisant (H_2), $f(1\times 1) = f(1)^2$ d'où l'on tire $f(1)\big[f(1)-0\big] = 0$ et donc $f(1) = 1$ ou bien $f(1) = 0$. Mais d'après (H_1), $f(1) \neq 0$ et donc $\boxed{f(1) = 1}$.
En utilisant toujours la propriété (H_1), $f(-1\times -1) = f(-1)^2$ d'où l'on tire $\big[f(-1)-1\big]\big[f(1)+1\big] = 0$ et donc $f(-1) = 1$ ou alors $f(-1) = -1$. Mais comme f est à valeurs positives, il vient que $\boxed{f(-1) = 1}$.

b. Soit $x \in \mathbb{R}$. Écrivons $f(-x) = f\big((-1)\times x\big) = f(-1)f(x) = f(x)$ en utilisant a) et la propriété H_2.

c. Soit $x \neq 0$, d'après H_1, $f(x) \neq 0$. Écrivons en utilisant H_2,

$$1 = f(1) = f(x\frac{1}{x}) = f(x)f(\frac{1}{x})$$

on en déduit que $f(1/x) = \dfrac{1}{f(x)}$.

$\boxed{Q\ 9}$

a.
- Montrons que $D \neq \emptyset$. Posons $z = 0$. Puisque $f(z) = 0 \leq 1$, $r = f(1+0) = f(1) = 1 \in D$. Donc $1 \in D$ et $D \neq \emptyset$.
- Montrons que D est majorée par C : soit $r \in D$. Il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) \leq 1$ et $r = f(1+z)$. En utilisant la propriété H_3, on a

$$f(1+z) \leq C\max(f(1),f(z)) \leq C$$

puisque $f(1) = 1$ et que $f(z) \leq 1$.

Par conséquent, D possède une borne supérieure.

b. Nous avons vu que $1 \in D$. Puisque C_f est un majorant de D, il vient que $1 \leq C_f$.

$\boxed{Q\ 10}$ Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Supposons par exemple que $0 \leq f(y) \leq f(x)$. Supposons dans un premier temps $x \neq 0$. Alors

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f\Big(x\big[1+\frac{y}{x}\big]\Big) \\ &= f(x)f(1+\frac{y}{x}) \quad (\text{ d'après } H_2) \end{aligned}$$

Posons $z = \frac{y}{x}$. En utilisant la question 8, $f(z) = \dfrac{f(y)}{f(x)} \leq 1$. Par conséquent, $f(1+\frac{y}{x}) \in D$ et puisque C_f est un majorant de D, $f(1+y/x) \leq C_f$. On a donc puisque $\max(f(x),f(y)) = f(x)$,

$$f(x+y) \leq f(x)C_f = C_f\max\big(f(x),f(y)\big)$$

Dans le cas où $x=0$, l'inégalité est vérifiée car $C_f \geq 1$ et $\max(f(x),f(y)) = f(x)$.

$\boxed{Q\ 11}$ Les propriétés (H_1) et (H_2) sont claires. La propriété (H_4) est aussi satisfaite (c'est l'inégalité triangulaire). Montrons (H_3). Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. D'après l'inégalité triangulaire, $f(x+y) = |x+y| \leq |x|+|y| \leq \max(|x|,|y|) + \max(|x|,|y|) = 2\max(f(x),f(y))$. Il suffit de poser $C=2$.
Lorsque $|z| \leq 1$, $z \in [-1,1]$ et alors $\sup_D = \sup_{-1\leq z\leq 1}|1+z| = \sup_{-1\leq z\leq 1}(1+z) = 2$. On a donc $\boxed{C_g = 2}$.

$\boxed{Q\ 12}$ Les hypothèses (H_1) et (H_2) sont immédiates. Montrons (H_3). Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$h(x+y) = (x+y)^2 = x^2+y^2+2xy \leq 2(x^2+y^2) \leq 4\max(h(x),h(y)$$

Il suffit donc de prendre $C=4$. On a utilisé l'inégalité $xy \leq \dfrac{x^2+y^2}{2}$. La propriété (H_4) n'est pas vérifiée par exemple pour $x=1$ et $y=1$: $h(x+y) = 4 > h(x)+h(y) = 2$. On calcule facilement $C_h = \sup_{z^2\leq 1}|(1+z)^2| = \sup_{-1\leq z\leq 1}(1+z)^2 = 4$.

$\boxed{Q\ 13}$ Soit $r \in D$. Il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $r = f(1+z)$ avec $f(z) \leq 1$. En utilisant (H_4),

$$r = f(1+z) \leq f(1) + f(z) \leq 1+1 = 2$$

Par passage à la borne sup on en déduit que $C_f = \sup D \leq 2$.

$\boxed{Q\ 14}$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(r)\ &: \forall (x_0,\dots,x_{2^r-1}) \in \mathbb{R}^{2^r} \\ f(x_0+\dots+x_{2^r-1}) &\leq C_f^r \max\big[f(x_0),\dots,f(x_{2^r-1})\big] \end{aligned}$$

- $\mathcal{P}(1)$: Soient $(x_0,x_1) \in \mathbb{R}^2$, d'après la question 10, $f(x_0+x_1) \leq C_f \max[f(x_0),f(x_1)]$.
- $\mathcal{P}(r) \Rightarrow \mathcal{P}(r+1)$: soient $(x_0,\dots,x_{2^{r+1}-1}) \in \mathbb{R}^{2^{r+1}}$, posons $y_0 = x_0+\dots+x_{2^r-1}$ et $y_1 = x_{2^r}+\dots+x_{2^{r+1}-1}$. Alors

$$\begin{aligned} f(x_0+\dots+x_{2^{r+1}-1}) &= f(y_0+y_1) \\ &\leq C_f \max[f(y_0),f(y_1)] \quad (\text{ d'après Q10 }) \end{aligned}$$

Mais d'après $\mathcal{P}(r)$, $f(y_0) \leq C_f^r \max[f(x_0),\dots,f(x_{2^r-1})]$ et $f(y_1) \leq C_f^r \max[f(x_{2^r}),\dots f(x_{2^{r+1}-1})]$. Par conséquent, $f(y_0+y_1) \leq C_f^{r+1}\max[f(x_0),\dots,f(x_{2^{r+1}-1})]$.

$\boxed{Q\ 15}$

a. Posons $r = E(\log_2 a)+1$. D'après la définition de la partie entière, $r-1 \leq \log_2 a < r$ d'où $2^{r-1} \leq a < 2^r$.
b. Posons $x_0 = \dots = x_{a-1} = 1$ et $x_a = \dots x_{2^r-1} = 0$. Alors $a = x_0+\dots+x_{2^r-1}$. En utilisant la question 14,

$$\begin{aligned} f(a) &= f(x_0+\dots+x_{2^r-1}) \\ &\leq C_f^r \max[f(x_0),\dots,f(x_{2^r-1})] \\ &\leq 2^r \end{aligned}$$

puisque $f(x_0) = \dots = f(x_{a-1}) = 1$ et $f(x_a) = \dots = f(x_{2^r-1}) = 0$ et que $C_f \leq 2$.

$\boxed{Q\ 16}$ En utilisant la formule du binôme,

$$\begin{aligned} f\big([x+y]^n\big) &= f\Big(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\Big) \\ &\leq C_f^r \max_{0\leq k\leq n}\Big[f\Big(\binom{n}{k}x^k y^{n-k}\Big)\Big] \quad (\text{ d'après 14}) \\ &\leq C_f^r \max_{0\leq k\leq n}\Big[f\Big(\binom{n}{k}\Big)f(x^k)f(y^{n-k})\Big] \quad (\text{ d'après } H_2) \end{aligned}$$

Mais puisque $a = \dbinom{n}{k}$ est un entier non-nul, d'après la question 15, $f\Big(\dbinom{n}{k}\Big) \leq 2\dbinom{n}{k}$. Par conséquent, en utilisant H_2, $f(x^k) = f(x)^k$, $f(y^{n-k}) = f(y)^{n-k}$, on obtient :

$$f([x+y]^n) \leq 2C_f^r \max_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k} f(x)^k f(y)^{n-k}$$

Mais en majorant le plus grand des réels $\binom{n}{k}f(x)^k f(y)^{n-k}$ par la somme de tous ces termes, $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}f(x)^k f(y)^{n-k} = [f(x)+f(y)]^n$, on obtient finalement

$$f([x+y]^n) \leq 2C_f^r[f(x)+f(y)]^n$$

Mais comme $C_f \leq 2$, $2C_f^r \leq 2^{r+1}$.

$\boxed{Q\ 17}$

a. D'après la question précédente,

$$f\big([x+y]^{2^r-1}\big) \leq 2^{r+1}\big[f(x)+f(y)\big]^{2^r-1}$$

Mais en utilisant H_2, $f\big((x+y)^{2^r-1}\big) = \big[f(x+y)\big]^{2^r-1}$ et donc

$$\big[f(x+y)\big]^{2^r-1} \leq 2^{r+1}\big[f(x)+f(y)\big]^{2^r-1}$$

En prenant la puissance $1/(2^r-1)$ de cette inégalité entre réels positifs, on obtient

$$f(x+y) \leq u_r[f(x)+f(y)]$$

où $u_r = 2^{\frac{r+1}{2^r-1}}$.

b. Pour $r \geq 1$, $u_r = e^{\frac{r+1}{2^r-1}\ln 2}$ Mais comme $\dfrac{r+1}{2^r-1} \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$ (la suite géométrique l'emporte sur la suite linéaire), il vient que $u_r \xrightarrow[r\to+\infty]{} 1$.

c. Par passage à la limite dans les inégalités lorsque $r \to +\infty$, on en déduit que $f(x+y) \leq f(x)+f(y)$ et donc f vérifie (H_4).

$\boxed{Q\ 18}$ Les propriétés (H_1), (H_2) et (H_3) sont faciles à vérifier. Il suffit de distinguer les cas $x=0$ et $y=0$.

$\boxed{Q\ 19}$ Facile.

$\boxed{Q\ 20}$

a. Puisque f n'est pas triviale, il existe $x \neq 0$ tel que $f(x) \neq 1$.
   - Si $f(x) > 1$, il suffit de poser $x_0 = x$.
   - Si $f(x) < 1$, posons $x_0 = 1/x$. D'après la question 8c, $f(x_0) = f(1/x) = 1/f(x) > 1$.

b. Comme $f(1) = 1$ (question 8), on a $f(1) < f(x_0)$ et puisque g est équivalente à f, on a également $1 = g(1) < g(x_0)$.

$\boxed{Q\ 21}$

- Montrons que $A(f,x) \neq \emptyset$. La suite géométrique $\big(f(x_0)^n\big)_{n\geq 1}$ de raison $f(x_0) > 1$ diverge vers $+\infty$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(x_0)^n > f(x)$. Comme l'entier n est rationnel, $n \in A(f,x)$.
- Montrons que $A(f,x)$ est minorée par $\dfrac{\ln f(x)}{\ln f(x_0)}$. Soit $r \in A(f,x)$, on a $\ln f(x) < r\ln f(x_0)$ et puisque $\ln f(x_0) > 0$, il vient que $r > \dfrac{\ln f(x)}{\ln f(x_0)}$.
- La partie $A(f,x)$ possède donc une borne inférieure. Comme on vient de montrer que $\dfrac{\ln f(x)}{\ln f(x_0)}$ est un minorant de $A(f,x)$, on a $\dfrac{\ln f(x)}{\ln f(x_0)} \leq \inf A(f,x)$.
- Utilisons la caractérisation de $\inf A(f,x)$ par ε. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe un rationnel r tel que $\dfrac{\ln f(x)}{\ln f(x_0)} < r < \dfrac{\ln f(x)}{\ln f(x_0)} + \varepsilon$. Mais alors comme $\ln f(x) < r\ln f(x_0)$, il vient que $f(x) < f(x_0)^r$ c'est à dire $r \in A(f,x)$.

$\boxed{Q\ 22}$ Montrons que $A(f,x) \subset A(g,x)$. Soit $r = \dfrac{p}{q} \in A(f,x)$. Comme $r \geq 0$, $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^\star$. On a $f(x) < f(x_0)^{p/q}$ et donc $f(x)^q < f(x_0)^p$. En utilisant la propriété (H_2), $f(x^q) < f(x_0^p)$. Mais puisque g est équivalente à f, on a également $g(x^q) < g(x_0^p)$ et d'après (H_2), $g(x)^q < g(x_0)^p$ et donc $g(x) < g(x_0)^{p/q}$ c'est à dire $r \in A(g,x)$. L'autre inclusion se montre de la même façon.

$\boxed{Q\ 23}$ Comme $\inf A(f,x) = \inf A(g,x)$, on en déduit que

$$\frac{\ln f(x)}{\ln f(x_0)} = \frac{\ln g(x)}{\ln g(x_0)}$$

et en posant $\alpha = \dfrac{\ln g(x_0)}{\ln f(x_0)} > 0$, on obtient $\ln g(x) = \alpha \ln f(x)$ c'est à dire $g(x) = f(x)^\alpha$. Le réel α trouvé est indépendant de x pourvu que $f(x) > 1$. Si maintenant $0 < f(x) < 1$, puisque $f(1/x) = 1/f(x) > 1$, on a $g(1/x) = f(1/x)^\alpha$ donc $\dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{f(x)^\alpha}$ et là aussi on a $g(x) = f(x)^\alpha$. Si $f(x) = 0$, $x = 0$ donc $g(x) = 0$ et là aussi $g(x) = f(x)^\alpha$. Si $f(x) = 1$, on doit avoir également $g(x) = 1$ (si $g(x) > 1$, on aurait $f(x) > 1$ et si $g(x) < 1$, on aurait $f(x) < 1$). On a bien montré que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)^\alpha$.